Groupe de travail : Lecture de l'article de Joan Millès « André-Quillen cohomology of algebras over an operad » Exposé n°6 : Dualité de Koszul des algèbres quadratiques

Jules Givelet

2 décembre 2025

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 0 et les algèbres sont des $\mathbb{K}$-algèbres associatives, unitaires.

1 (Co)algèbre duale de Koszul

Soit V un espace vectoriel et R un sous-espace vectoriel de l'algèbre tensorielle $T(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}$.

Définition 1.1. L'algèbre *engendrée* par V et sujette aux *relations* R est l'unique algèbre $A(V, R)$ munie d'un morphisme d'algèbres $T(V) \twoheadrightarrow A(V, R)$ vérifiant la propriété universelle suivante :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & T(V) \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\forall"'] & A(V,R) \arrow[d, "\exists !"] \\
& & A
\end{tikzcd}$$

On dit que $A(V, R)$ est *quadratique* si $R \subset V^{\otimes 2}$.

Explicitement, l'algèbre $A(V, R)$ est l'algèbre quotient $T(V)/(R)$. Lorsque $R \subset V^{\otimes 2}$, la graduation de $T(V)$ par $\mathbb{N}$ est conservée par le passage au quotient et on a $A(V, R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} A^{(n)}$ avec

$$A^{(n)} = \frac{V^{\otimes n}}{\sum\limits_{i+2+j=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}}.$$

Exemples 1.2.

- On a $A(V, 0) = T(V)$
- On a $A(V, V^{\otimes 2}) = \mathbb{K} \oplus V$ munie du produit trivial ($v_1 v_2 = 0$ pour $v_1, v_2 \in V$) *i.e.* on a $A(V, V^{\otimes 2}) = D(V)$, l'algèbre des nombres duaux associée à V.
- On a $A(V, v_1v_2 - v_2v_1 : v_1, v_2 \in V) = S(V)$, l'algèbre symétrique de V, et si V admet une base $(x_1, \ldots, x_n)$, alors $S(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Si V est de dimension 1, alors on a $S(x) = T(x) = \mathbb{K}[x]$
- On a $A(V, v_1v_2 + v_2v_1 : v_1, v_2 \in V) = \Lambda(V)$, l'algèbre extérieure de V. Si V est de dimensions 1, alors $\Lambda(x) = D(x) = \mathbb{K}[x]/(x^2)$.

Pour rappel, la coalgèbre conilpotente colibre associée à un espace vectoriel V est $T^c(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}$ dont la conuité $T^c(V) \to \mathbb{K}$ est la projection sur les mots de poids 0 et dont le coproduit est le coproduit de déconcaténation :

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = \sum_{i=0}^{n} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_n$$

où $v_0 = v_{n+1} := 1 \in \mathbb{K} = V^{\otimes 0}$.

À partir de maintenant, on supposeras toujours que $R \subset V^{\otimes 2}$.

Définition 1.3. La coalgèbre (quadratique) *coengendrée* par V et sujette aux *corelations* R est l'unique coalgèbre $C(V,R)$ munie d'un morphisme de coalgèbres $C(V,R) \hookrightarrow T^c(V)$ vérifiant la propriété universelle suivante :

$$\begin{tikzcd} C(V,R) \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "0"] & T^c(V) \arrow[r, two heads] & V^{\otimes 2}/R \\ C \arrow[u, "\exists !"] \arrow[ur, "\forall"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

Explicitement, $C(V,R)$ est une sous-coalgèbre graduée $\bigoplus_{n\geqslant 0} C^{(n)}$ de $T^c(V)$ avec

$$C^{(n)} = \bigcap_{i+2+j=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \subset V^{\otimes n}.$$

Autrement dit, $C(V,R)$ est la plus grande sous-coalgèbre de $T^c(V)$ telle que ses éléments de poids 2 soient ceux de R.

Exemples 1.4.

- On a $C(V,0) = \mathbb{K} \oplus V$ avec $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ et $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ pour tout $v \in V$. Cette coalgèbre est appelée *coalgèbre des nombres duaux associée à* V et est notée $D^c(V)$. En effet, l'algèbre duale linéaire de $D^c(V)$ est $D(V^*)$:
$$D^c(V)^* = (\mathbb{K} \oplus V)^* = \mathbb{K} \oplus V^*$$
et pour $\phi_1, \phi_2 \in V^*$, on a $\phi_1\phi_2 = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta|_V = 0$ car $\Delta(v)$ n'a pas de composante en $V \otimes V$ pour tout $v \in V$.
- On a $C(V, V^{\otimes 2}) = T^c(V)$.
- On a $C(V, v_1v_2 - v_2v_1 : v_1, v_2 \in V) =: \Lambda^c(V)$ est appelée *coalgèbre extérieure de* V. Explicitement, on a
$$\Lambda^c(V)^{(n)} = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)} : v_1, \ldots, v_n \in V \right)$$
et son algèbre duale linéaire est $\Lambda(V^*)$.
- On a $C(V, v_1v_2 + v_2v_1 : v_1, v_2 \in V) =: S^c(V)$ est appelée *coalgèbre symétrique de* V. Explicitement, on a
$$S^c(V)^{(n)} = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} : v_1, \ldots, v_n \in V \right)$$
et son algèbre duale linéaire est $S(V^*)$.

Définition 1.5. Soit $A = A(V,R)$ une algèbre quadratique. La *coalgèbre duale de Koszul de* A est

$$A^{¡} := C(V,R)$$

et son *algèbre duale de Koszul* est l'algèbre duale de cette dernière

$$A^! = \left(A^{¡}\right)^*.$$

Remarque 1.6. Attention, on prend ici le dual linéaire dans la catégorie des espaces vectoriels gradués *i.e.* $A^! = \bigoplus_{n\geqslant 0} (A^{¡(n)})^*$. Le dual linéaire dans la catégorie des espaces vectoriels au sens classique est $\prod_{n\geqslant 0} (A^{¡(n)})^*$.

En reprenant les exemples précédents, on a

$$T(V)^! = D(V^*),\ D(V)^! = T(V^*),$$
$$S(V)^! = \Lambda(V^*),\ \Lambda(V)^! = S(V^*)$$

et lorsque V est de dimension 1, on a

$$\Lambda(x^*) = S(x)^! = T(x)^! = D(x^*).$$

Proposition 1.7. L'algèbre duale de Koszul d'une algèbre quadratique de type fini (*i.e.* V est de dimension finie) est quadratique :

$$A(V,R)^! = A(V^*, R^\perp)$$

où $R^\perp$ est le noyau de la composition de morphismes $(V^*)^{\otimes 2} \simeq (V^{\otimes 2})^* \twoheadrightarrow R^*$.

Démonstration. On a $A(V^*,R^\perp)^{(n)} = (V^*)^{\otimes n}/\sum_{i+2+j=n}(V^*)^{\otimes i} \otimes R^\perp \otimes (V^*)^{\otimes j}$ et donc

$$\begin{aligned}
\left(A(V^*,R^\perp)^{(n)}\right)^* &= \left(\sum_{i+2+j=n} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^\perp \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^\perp \\
&= \bigcap_{i+2+j=n} \left((V^*)^{\otimes i} \otimes R^\perp \otimes (V^*)^{\otimes j}\right)^\perp \\
&= \bigcap_{i+2+j=n} (V^{**})^{\otimes i} \otimes R^{\perp\perp} \otimes (V^{**})^{\otimes j} \\
&\simeq \bigcap_{i+2+j=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \\
&= C(V,R)^{(n)}
\end{aligned}$$

et par bidualité, $A(V^*,R^\perp)^{(n)} \simeq A(V,R)^{!(n)}$. ✿

De manière générale, l'orthogonal $R^\perp$ correspond à l'image de $(V^{\otimes 2}/R)^*$ dans $(V^*)^{\otimes 2}$ sous le morphisme transposé à la projection canonique $V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}/R$. Ainsi, en calculant une base de $V^{\otimes 2}/R$, on peut écrire la projection comme une matrice M et une base de $R^\perp$ est alors donnée par l'image de M^t.

Exemples 1.8.

- Calculons $A(x,y : y^2 = x^2, yx = xy)^!$. En ordonnant les variables par $x < y$, on a les *règles de réécriture* $y^2 \to x^2$ et $yx \to xy$ si bien que (x^2, xy) est une base (PBW) de $V^{\otimes 2}/R$. La projection $V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}/R$ est alors donnée par la matrice

  $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{K}\{x^2, xy, yx, y^2\} \to \mathbb{K}\{x^2, xy\}.$$

  On a alors

  $$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{K}\{x^{2*}, xy^*\} \to \mathbb{K}\{x^{*2}, x^*y^*, y^*x^*, y^{*2}\}$$

  d'image $R^\perp = \mathbb{K}\{x^{*2} + y^{*2}, x^*y^* + y^*x^*\}$ et donc

  $$A^! = A(x^*, y^* : y^{*2} = -x^{*2}, y^*x^* = -x^*y^*).$$

  Explicitement, en appliquant les règles de réécritures $y^{*2} \to -x^{*2}$ et $y^*x^* \to -x^*y^*$, on a

  $$A^{!(n)} = \mathbb{K}\{x^{*n}, x^{*n-1}y^*\}.$$

  Le produit de $A^!$ est donné par

  $$\mu(x^{*n}, x^{*m}) = x^{*n+m} \qquad \mu(x^{*n}, x^{*m-1}y^*) = x^{*n+m-1}y^*$$
  $$\mu(x^{*n-1}y^*, x^{*m}) = (-1)^m x^{*n+m-1}y \qquad \mu(x^{*n-1}y^*, x^{*m-1}y^*) = (-1)^m x^{*n+m}$$

  ce qui s'écrit sous forme matricielle :

  $$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (-1)^m \\ 0 & 1 & (-1)^m & 0 \end{pmatrix} :&\mathbb{K}\{x^{*n} \cdot x^{*m}, x^{*n} \cdot x^{*m-1}y^*, x^{*n-1}y^* \cdot x^{*m}, x^{*n-1}y^* \cdot x^{*m-1}y^*\} = A^{!(n)} \otimes A^{!(m)} \\ \to&\mathbb{K}\{x^{*n+m}, x^{*n+m-1}y^*\} = A^{!(n+m)}.\end{aligned}$$

  En transposant, on obtient le coproduit de $A^¡$:

  $$\begin{aligned}\Delta(x^n) &= \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^j + (-1)^j x^{i-1}y \otimes x^{j-1}y \\ \Delta(x^{n-1}y) &= \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^{j-1}y + (-1)^j x^{i-1}y \otimes x^j.\end{aligned}$$

- Calculons $A(x, y : xy = x^2, y^2 = x^2)^!$. Un supplémentaire de R dans $V^{\otimes 2}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\{yx, y^2\}$ si bien que la projection $V^{\otimes 2} \to A^{(2)}$ est donnée par la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{K}\{x^2, xy, yx, y^2\} \to \mathbb{K}\{yx, y^2\}$$
et l'image de sa transposée fournit alors la base $(y^*x^*, x^{*2} + x^*y^* + y^{*2})$ de $R^\perp$ si bien que
$$A^! = A(x^*, y^* : y^*x^* = 0, y^{*2} = -x^*y^* - x^{*2}).$$

2 Koszulité d'une algèbre quadratique

Soit $A = A(V, R)$ une algèbre quadratique. Une telle algèbre est alors automatiquement munie d'une augmentation $\varepsilon : A \twoheadrightarrow A^{(0)} = \mathbb{K}$. On note alors $\overline{A} = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \bigoplus_{n \geqslant 1} A^{(n)}$.

Définition 2.1. La *construction bar de A* est la coalgèbre différentielle graduée
$$BA = (B_\bullet A, \Delta, d)$$
où $B_n A = \overline{A}^{\otimes n}$ et, en notant les tenseurs élémentaires dans $B_n A$ par $[a_1|\cdots|a_n]$,
$$\Delta([a_1|\cdots|a_n]) = \sum_{i=0}^{n} [a_1|\cdots|a_i] \otimes [a_{i+1}|\cdots|a_n]$$
$$d([a_1|\cdots|a_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} [a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n]$$

On peut vérifier à la main que $d^2 = 0$ (associativité de la multiplication dans $\overline{A}$) et que d est une codérivation *i.e.* $\Delta \circ d = (d \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d) \circ \Delta$ (avec la convention de signe de Koszul). En fait, la coalgèbre graduée $(B_\bullet A, \Delta)$ est égale à $T^c(s\overline{A})$ où $s\overline{A}$ est la suspension de $\overline{A}$ et la codérivation d est la codérivation naturellement associée à l'application linéaire
$$T^c(s\overline{A}) \twoheadrightarrow s\overline{A} \otimes s\overline{A} \to s^2\overline{A}^{\otimes 2} \to s\overline{A}$$
envoyant $sa \otimes sb$ sur $(-1)^{|a|} s^2(a \otimes b)$ puis sur $(-1)^{|a|} s(ab)$ (où ici, $|a| = 0$).

Remarque 2.2. On peut généraliser cette construction à n'importe quelle algèbre différentielle graduée augmentée en modifiant légèrement la codérivation pour prendre en compte la dérivation initiale de l'algèbre. Dans notre cas où l'algèbre est concentrée en degré homologique 0, la construction bar coïncide avec le complexe de Hochschild non unitaire.

La construction bar de A est alors à la fois graduée par le degré homologique et par le poids :
$$BA = \bigoplus_{\substack{\omega \geqslant 0 \\ n \geqslant 0}} (B_n A)^{(\omega)}$$
où $\omega([a_1|\cdots|a_n]) = \omega(a_1) + \cdots + \omega(a_n)$ et $\omega([]) = 0$. On a alors une décomposition de BA par le poids puisque sa codérivation préserve le poids :

$$\begin{array}{lllll}
n : & 0 & 1 & 2 & 3 \\
(B_\bullet A)^{(0)} : & \mathbb{K} & & & \\
(B_\bullet A)^{(1)} : & 0 \longleftarrow & V & & \\
(B_\bullet A)^{(2)} : & 0 \longleftarrow & \frac{V^2}{R} \longleftarrow & V \otimes V & \\
(B_\bullet A)^{(3)} : & 0 \longleftarrow & \frac{V^3}{RV + VR} \longleftarrow & \left(\frac{V^2}{R} \otimes V\right) \oplus \left(V \otimes \frac{V^2}{R}\right) \longleftarrow & V \otimes V \otimes V
\end{array}$$

On a noté $V^n := V^{\otimes n}$ pour distinguer les produits tensoriels de V provenant de la présentation quadratique de A des produits tensoriels provenant de la construction bar.

Le complexe diagonal $(B_\bullet A)^{(\bullet)}$ s'identifie alors à $T^c(V)$ dans laquelle se plonge canoniquement $A^{\text{!`}}$.

Proposition 2.3. Le plongement $A^{\text{!`}} \hookrightarrow BA$ induit un isomorphisme de coalgèbres graduées entre $A^{\text{!`}}$ et l'homologie diagonale de BA *i.e* pour tout $n \geqslant 0$,

$$A^{\text{!`}(n)} \simeq H_n\left((B_\bullet A)^{(n)}\right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
H_n\left((B_\bullet A)^{(n)}\right) &= \mathrm{Ker}\left(V^{\otimes n} \to \bigoplus_{i+2+j=n} V^{\otimes i} \otimes \frac{V^{\otimes 2}}{R} \otimes V^{\otimes j}\right) \\
&= \bigcap_{i+2+j=n} \mathrm{Ker}\left(V^{\otimes n} \to V^{\otimes i} \otimes \frac{V^{\otimes 2}}{R} \otimes V^{\otimes j}\right) \\
&= \bigcap_{i+2+j=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \\
&= A^{\text{!`}(n)}.
\end{aligned}$$

✿

Remarque 2.4. On peut déplacer l'homologie diagonale en degré 0 en introduisant le *degré de syzygy* qui vaut $\omega - n$. La codérivation d est alors de degré de syzygy 1 et c'est la cohomologie en degré de syzygy 0 qui s'identifie à $A^{\text{!`}}$.

Pour nous, la construction bar a deux utilités principales. La première est de fournir la *construction bar augmentée* $BA \otimes_\pi A$ qui est une résolution de $\mathbb{K}$ par des A-modules à droite libres. La seconde est d'être un bloc de base de la *résolution bar-cobar* ΩBA qui est un remplacement cofibrant de A.

Définition 2.5. La *construction bar augmentée* associée à A est le produit tensoriel $BA \otimes A$ muni de la différentielle

$$\begin{aligned}
d_n : \quad B_n A \otimes A &\longrightarrow B_{n-1}A \otimes A \\
[a_1|\cdots|a_n]a_{n+1} &\longmapsto \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1}[a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n]a_{n+1} \\
&\qquad + (-1)^{n-1}[a_1|\cdots|a_{n-1}]a_n a_{n+1}
\end{aligned}$$

et de l'augmentation

$$\varepsilon =: d_0 : A = B_0 A \otimes A \to \mathbb{K}.$$

On a $d = d_{BA} \otimes \mathrm{id}_A + \tau_\pi$ où j'appellerai τ_π la *torsion associée* au morphisme $\pi : BA \twoheadrightarrow B_1 A \hookrightarrow A$ envoyant $[a]$ sur a. Si bien que l'on notera la résolution bar $BA \otimes_\pi A$.

La *torsion associée à un morphisme* $f : C \to A$ où C est une coalgèbre est l'endomorphisme de $C \otimes A$ défini par

$$\tau_f := C \otimes A \xrightarrow{\Delta_C \otimes \mathrm{id}_A} C \otimes C \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes f \otimes \mathrm{id}_A} C \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \mu_A} C \otimes A.$$

Par associativité de μ_A et coassociativité de Δ_{BA}, on a

$$\tau_f^2 = \tau_{\mu_A \circ (f \otimes f) \circ \Delta_{BA}}.$$

On note alors $f \star f := \mu_A \circ (f \otimes f) \circ \Delta_{BA}$.

Proposition 2.6. La résolution bar $BA \otimes_\pi A$ est une résolution de $\mathbb{K}$ *i.e.* $d^2 = 0$ et $BA \otimes_\pi A$ est acyclique. C'est la *résolution de Hochschild à droite normalisée.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
d^2 &= \cancel{d_{BA}^2} \otimes \mathrm{id}_A + (d_{BA} \otimes \mathrm{id}_A) \circ \tau_\pi + \tau_\pi \circ (d_{BA} \otimes \mathrm{id}_A) + \tau_\pi^2 \\
&= \tau_{\pi \circ d_{BA}} + \tau_{\pi \star \pi} \\
&= \tau_{\pi \circ d_{BA} + \pi \star \pi}
\end{aligned}$$

et il suffit donc de montrer que $\pi \circ d_{BA} + \pi \star \pi = 0$. On a $\pi \star \pi = \pi \circ d_{BA} = 0$ sur $\bigoplus_{n \neq 2} B_n A$ par définition de π et pour $[a|b] \in B_2 A$, on a

$$\pi(d_{BA}[a|b]) = \pi([ab]) = ab$$

et

$$\begin{aligned} \pi \star \pi([a|b]) &= \mu_A(\pi \otimes \pi([a] \otimes [b])) \\ &= \mu_A(-a \otimes b) = -ab \end{aligned}$$

(le changement de signe provient de la convention de Koszul et du fait que $[a]$ est de degré 1 dans BA). Donc $BA \otimes_\pi A$ est bien un complexe de chaîne.

Le fait que $BA \otimes_\pi A$ soit acyclique provient du fait qu'on peut construire une homotopie $\mathbb{K}$-linéaire de $\mathrm{id}_{BA \otimes_\pi A}$ vers 0. En effet, en posant

$$\begin{aligned} h_n : \qquad B_n A \otimes A &\longrightarrow B_{n+1} A \otimes A \\ [a_1|\cdots|a_n](\lambda + a_{n+1}) &\longmapsto (-1)^n [a_1|\cdots|a_{n+1}], \end{aligned}$$

pour $n \geqslant 0$ et $h_{-1}(\lambda) = []\lambda$, on a

$$\begin{aligned} (dh + hd)([a_1|\cdots|a_n]a_{n+1}) &= \cancel{(-1)^n \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} [a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_{n+1}] \right)} + (-1)^{n+n}[a_1|\cdots|a_n]a_{n+1} \\ &\quad \cancel{+ (-1)^{n-1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} [a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_{n+1}] \right) + (-1)^{n-1}[a_1|\cdots|a_{n-1}|a_n a_{n+1}] \right)} \\ &= [a_1|\cdots|a_n]a_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dh + hd)([a_1|\cdots|a_n]\lambda) &= h\left((-1)^{n-1}[a_1|\cdots|a_{n-1}]a_n\right) \\ &= [a_1|\cdots|a_n] \end{aligned}$$

et

$$(dh + hd)(\lambda) = d_0([]\lambda) = \varepsilon(\lambda) = \lambda.$$

✿

Remarque 2.7. Le *produit de convolution* $\star$ fait de $\mathrm{Hom}(BA, A)$ une algèbre pré-Lie différentielle graduée et la condition $\pi \circ d_{BA} + \pi \star \pi$ traduit le fait que π est une solution à l'équation de Maurer-Cartan. De manière générale, on appelle un morphisme $f : C \to A$ un *morphisme tordant* si c'est un morphisme de degré -1 qui est solution de l'équation de Maurer-Cartan et l'ensemble des morphismes tordant est noté $\mathrm{Tw}(C, A)$. Cette appellation provient du fait que la différentielle naturelle de $C \otimes A$ tordue par f est de carré nul si et seulement si f est tordant :

$$(d_{C \otimes A} + \tau_f)^2 = 0 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Tw}(C, A).$$

Le produit tensoriel tordu $C \otimes_f A$ n'est pas acyclique en général est on dit que f est koszul lorsque c'est le cas :

$$C \otimes_f A \text{ est acyclique} \Leftrightarrow f \in \mathrm{Kos}(C, A).$$

On a un morphisme tordant $\kappa : A^{\text{i}} \twoheadrightarrow V \hookrightarrow A$ (pour que ce morphisme soit bien de degré -1, il faut que V soit concentré en degré homologique 1 dans A^{i} si bien que $A^{\text{i}} = C(sV, s^2 R)$). En effet, on a $d_{A^{\text{i}}} = 0$ et

$$0 = \kappa \star \kappa : \ R = A^{\text{i}(2)} \xrightarrow{\mathrm{pr} \circ \Delta} V \otimes V \xrightarrow{\mu} A^{(2)} = V^{\otimes 2}/R$$

Définition 2.8. On dit que A est une *algèbre koszul* si le *complexe de Koszul* $A^{\text{i}} \otimes_\kappa A$ est acyclique *i.e.* si κ est un morphisme koszul.

Comme κ préserve le poids, le complexe de Koszul de A est gradué par le poids (contrairement à la construction bar augmentée)

$$A^{¡} \otimes_\kappa A = \bigoplus_{\omega \geqslant 0} \left(A^{¡(\omega)} \longrightarrow A^{¡(\omega-1)} \otimes A^{(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{¡(1)} \otimes A^{(\omega-1)} \longrightarrow A^{(\omega)} \right)$$

et la différentielle en degré n est en poids $n+m$ est donnée par

$$\begin{aligned} d = \tau_\kappa : \qquad & A^{¡(n)} \otimes A^{(m)} \longrightarrow A^{¡(n-1)} \otimes A^{(m+1)} \\ & \sum v_1 \cdots v_n \otimes w_1 \cdots w_m \longmapsto \sum (-1)^{n-1} v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n w_1 \cdots w_m \end{aligned}$$

Par coliberté de BA, le plongement canonique $i : A^{¡} \hookrightarrow BA$ est induit par sa coordonnée de degré 1

$$A^{¡} \to \overline{A}.$$

Cette projection coïncide alors avec le morphisme tordant $\kappa : A^{¡} \to A$.

Proposition 2.9. L'algèbre A est koszul si et seulement si le plongement canonique $i : A^{¡} \hookrightarrow BA$ est un quasi-isomorphisme *i.e.* l'homologie de BA est concentrée au niveau des mots de degré égal à leur poids.

Démonstration. Le morphisme $i \otimes \mathrm{id}_A : A^{¡} \otimes_\kappa A \to BA \otimes_\pi A$ est un morphisme de complexes de chaînes :

$$\begin{aligned} d \circ (i \otimes \mathrm{id}_A) \left(\sum v_1 \cdots v_n \otimes w_1 \cdots w_m \right) &= d \left(\sum [v_1 | \cdots | v_n] w_1 \cdots w_m \right) \\ &= \sum \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} [v_1 | \cdots | \cancel{v_i v_{i+1}} | \cdots | v_n] w_1 \cdots w_m \\ &\quad + \sum (-1)^{n-1} [v_1 | \cdots | v_{n-1}] v_n w_1 \cdots w_m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (i \otimes \mathrm{id}_A) \circ d \left(\sum v_1 \cdots v_n \otimes w_1 \cdots w_m \right) &= (i \otimes \mathrm{id}_A) \left(\sum (-1)^{n-1} v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n w_1 \cdots w_m \right) \\ &= \sum (-1)^{n-1} [v_1 | \cdots | v_{n-1}] v_n w_1 \cdots w_m. \end{aligned}$$

Ainsi, si i est un quasi-isomorphisme, alors $i \otimes \mathrm{id}_A$ en est un aussi et donc le complexe de Koszul de A est acyclique car la construction bar augmentée l'est d'après la proposition précédente. Réciproquement, si le complexe de Koszul de A est acyclique, alors $i \otimes \mathrm{id}_A$ est un quasi-isomorphisme et donc i aussi d'après le *lemme de comparaison* :

Lemme 2.10. Si $\alpha : C \to A$ et $\alpha' : C' \to A'$ sont des morphismes tordants et si $f : C \to C'$ et $g : A \to A'$ sont des morphismes de (co)algèbres différentielles graduées, alors il suffit que deux des morphismes f, g et $f \otimes g : C \otimes_\alpha A \to C' \otimes_{\alpha'} A'$ soient des quasi-isomorphismes pour que le troisième le soit.

Démonstration. Admis (suites spectrales). ✿

✿

En fait, de manière plus générale, on a une identification entre les morphisme koszul et les quasi-isomorphismes

$$\mathrm{Kos}(C, A) \simeq \mathrm{qIso}(C, BA)$$

qui est une sous-identification entre les morphismes tordants et les morphismes de coalgèbres différentielles graduées

$$\mathrm{Tw}(C, A) \simeq \mathrm{Hom}_{dg}(C, BA).$$

On peut faire un raisonnement dual à tout ce que l'on vient de raconter grâce à la *construction cobar*.

Définition 2.11. Soit C une coalgèbre (conilpotente) différentielle graduée. La *construction cobar* de C est l'algèbre différentielle graduée
$$\Omega C = (\Omega_\bullet C, \mu, d)$$
dont l'algèbre graduée sous-jacente est $T(s^{-1}\overline{C})$ et dont la dérivation est définie par

$$\begin{aligned} d([c_1|\cdots|c_n]) = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+|c_1|+\cdots+|c_{i-1}|}[c_1|\cdots|d_C c_i|\cdots|c_n] \\ &+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+|c_1|+\cdots+|c_{i-1}|+|c_i^{(1)}|}[c_1|\cdots|c_i^{(1)}|c_i^{(2)}|\cdots|c_n]. \end{aligned}$$

On a alors des isomorphismes naturels
$$\mathrm{Hom}_{dg}(\Omega C, A) \simeq \mathrm{Tw}(C, A) \simeq \mathrm{Hom}_{dg}(C, BA)$$
si bien que Ω est adjoint à gauche de B. De plus, par un raisonnement tout à fait similaire, les morphismes koszuls $C \to A$ correspondent à des quasi-isomorphismes $\Omega C \to A$. On en conclut donc la proposition suivante :

Proposition 2.12. L'unité $\Omega BA \to A$ est un quasi-isomorphisme appelé *résolution bar-cobar* de A et A est Koszul si et seulement si le morphisme
$$\Omega A^{\mathrm{i}} \to A$$
est un quasi-isomorphisme.

Exemple 2.13. Pour l'algèbre symétrique $S(V)$, on a $S(V)^{\mathrm{i}} = \Lambda^c(V)$ et la différentielle du complexe de Koszul de $S(V)$ est

$$\begin{aligned} d : \Lambda^c(V)^{(n)} \otimes S(V)^{(m)} &\longrightarrow \Lambda^c(V)^{(n-1)} \otimes S(V)^{(m+1)} \\ \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(n)}\right)\otimes w_1\cdots w_m &\longmapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{n-1+\varepsilon(\sigma)}v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(n-1)}\otimes v_{\sigma(n)}w_1\cdots w_m. \end{aligned}$$

En posant $(v_1^i, \ldots, v_{n-1}^i) := (v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n)$ et $\sigma_i(k) := \sigma(k)$ si $\sigma(k) < i$ et $\sigma_i(k) := \sigma(k) - 1$ si $\sigma(k) > i$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(n) = i$ et $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{n-1+\varepsilon(\sigma)}v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(n-1)}\otimes v_{\sigma(n)}w_1\cdots w_m &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(n)=i}}(-1)^{n-1+\varepsilon(\sigma)}v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(n-1)}\otimes v_i w_1\cdots w_m \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(n)=i}}(-1)^{n-1+\varepsilon(\sigma)}v^i_{\sigma_i(1)}\cdots v^i_{\sigma_i(n-1)}\otimes v_i w_1\cdots w_m. \end{aligned}$$

Or, l'application
$$\begin{aligned} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma(n) = i\} &\longrightarrow \mathfrak{S}_{n-1} \\ \sigma &\longmapsto \sigma_i \end{aligned}$$
est une bijection de réciproque
$$\sigma \mapsto \left(k \mapsto \begin{cases} i & \text{si } k = n \\ \sigma(k) & \text{si } \sigma(k) < i \\ \sigma(k)+1 & \text{si } \sigma(k) \geqslant i \end{cases}\right).$$
De plus, on a $\varepsilon(\sigma_i) = \varepsilon(\sigma) + n - i$ si bien que
$$d\left((-1)^{n-1}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(n)}\right)\otimes w_1\cdots w_m\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}v^i_{\sigma(1)}\cdots v^i_{\sigma(n-1)}\right)\otimes v_i w_1\cdots w_m.$$

Autrement dit, si on note $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := (-1)^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$, on a

$$d(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \otimes w_1 \cdots w_m) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_n \otimes v_i w_1 \cdots w_m.$$

Ce complexe est alors acyclique puisque l'application

$$\begin{aligned} h : \quad \Lambda^c(V)^{(n)} \otimes S(V)^{(m)} &\longrightarrow \Lambda^c(V)^{(n+1)} \otimes S(V)^{(m-1)} \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \otimes w_1 \cdots w_m &\longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \wedge w_1 \otimes w_2 \cdots w_m \end{aligned}$$

forme une homotopie de $\mathrm{id}_{\Lambda^c(V) \otimes_\kappa S(V)}$ vers 0. Donc, $S(V)$ est une algèbre koszul.

Exemple 2.14. Si l'on reprend l'algèbre $A = A(x, y : y^2 = x^2, yx = xy)$, on avait calculé que sa coalgèbre duale de Koszul en poids n était

$$A^{\mathrm{i}(n)} = \mathbb{K}\{x^n, x^{n-1}y\}$$

et dont le coproduit est alors donné par

$$\begin{aligned} \Delta(x^n) &= \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^j + (-1)^j x^{i-1} y \otimes x^{j-1} y, \\ \Delta(x^{n-1}y) &= \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^{j-1} y + (-1)^j x^{i-1} y \otimes x^j. \end{aligned}$$

la différentielle du complexe de Koszul de A, avec cette présentation, est alors

$$\begin{aligned} d : \quad A^{\mathrm{i}(n)} \otimes A^{(m)} &\longrightarrow A^{\mathrm{i}(n-1)} \otimes A^{m+1} \\ x^n \otimes x^m &\longmapsto (-1)^{n-1} \left(x^{n-1} \otimes x^{m+1} - x^{n-2} y \otimes x^m y \right) \\ x^n \otimes x^{m-1} y &\longmapsto (-1)^{n-1} \left(x^{n-1} \otimes x^m y - x^{n-2} y \otimes x^{m+1} \right) \\ x^{n-1} y \otimes x^m &\longmapsto (-1)^{n-1} \left(x^{n-1} \otimes x^m y - x^{n-2} y \otimes x^{m+1} \right) \\ x^{n-1} y \otimes x^{m-1} y &\longmapsto (-1)^{n-1} \left(x^{n-1} \otimes x^{m+1} - x^{n-2} y \otimes x^m y \right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} x^n \otimes x^m - x^{n-1} y \otimes x^{m-1} y, \\ x^n \otimes x^{m-1} y - x^{n-1} y \otimes x^m \end{pmatrix} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} \pm d(x^{n+1} \otimes x^{m-1}) = \pm d(x^n y \otimes x^{m-2} y), \\ \pm d(x^{n+1} \otimes x^{m-2} y) = \pm d(x^n y \otimes x^{m-1}) \end{pmatrix} = \mathrm{Im}(d).$$

Le complexe de Koszul de A est donc acyclique et A est une algèbre koszul.

Cela implique alors que la construction cobar ΩA^{i} est un remplacement cofibrant de A que l'on peut expliciter. Le degré homologique de ΩA^{i} coïncide avec le degré de syzygy :

$$\begin{aligned} \Omega_0 A^{\mathrm{i}} &= T(V), \\ \Omega_1 A^{\mathrm{i}} &= \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\bigoplus_{i+2+j=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \right), \\ \Omega_2 A^{\mathrm{i}} &= \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\bigoplus_{i+3+j=n} V^{\otimes i} \otimes (R \otimes V \cap V \otimes R) \otimes V^{\otimes j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i+j+k+4=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \otimes R \otimes V^{\otimes k} \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Avec notre système de générateurs de $A^{¡}$, en notant $x_1 := x$ et $x_2 := y$, cela donne

$$\begin{aligned}
\Omega_0 A^{¡} &= \mathbb{K}\langle x, y\rangle\,,\\
\Omega_1 A^{¡} &= \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbb{K}\left\{[x_{\lambda_1}|\cdots|xx_{\lambda_i}|\cdots|x_{\lambda_n}]\ : \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \{1,2\}\right\},\\
\Omega_2 A^{¡} &= \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbb{K}\left\{[x_{\lambda_1}|\cdots|x^2x_{\lambda_i}|\cdots|x_{\lambda_n}], [x_{\lambda_1}|\cdots|xx_{\lambda_i}|\cdots|xx_{\lambda_j}|\cdots|x_{\lambda_n}] : \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \{1,2\}\right\},\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Pour la différentielle, on a

$$\begin{aligned}
&d[x^2] = [x|x] - [y|y], && d[xy] = [x|y] - [y|x],\\
&d[x^3] = [x|x^2] + [y|xy] - [x^2|x] + [xy|y], && d[x^2y] = [x|xy] + [y|x^2] - [x^2|y] + [xy|x],\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

Comme A est Koszul, la projection canonique $\mathbb{K}\langle x, y\rangle \twoheadrightarrow A$ induit un quasi-isomorphisme d'algèbre différentielles graduées $\Omega A^{¡} \to A$ *i.e.* $(\Omega A^{¡}, d)$ est acyclique et forme donc une résolution de A.

3 Base PBW et koszulité

Dans le dernier exemple de la partie précédente, on a établi la koszulité de A en observant qu'on avait une bonne base des éléments de poids n dans A et dans $A^{¡}$ qui nous permis d'expliciter le noyau et l'image de la différentielle dans le complexe de Koszul associé. Ce genre de base, formée de *monôme terminaux*, est à la source de la koszulité de nombreuses algèbres.

On suppose ici que V admet une base ordonnée

$$V = \mathbb{K}\{x_1, \ldots, x_d\}$$

avec $x_1 < \cdots < x_d$. Cette base ordonnée induit alors une base ordonnée de $T(V)$ grâce à l'ordre « deglex » :

$$\cdots < x_d < x_1x_1 < x_1x_2 < \cdots < x_1x_d < x_2x_1 < \cdots < x_2x_d < \cdots < x_dx_1 < \cdots < x_dx_d < x_1x_1x_1 < \cdots$$

Cet ordre sur les monômes permet alors d'écrire les relations de A sous la forme

$$x_ix_j = \sum_{(k,l)<(i,j)} \lambda_{i,j}^{k,l} x_kx_l$$

Le monôme x_ix_j est alors appelé *monôme dominant* de la relation. On peut faire en sorte que, pour toute relation, l'ensemble des monômes apparaissant à droite de l'égalité ne contienne le monôme dominant d'aucune autre relation et que les monômes dominant des relations soient distincts.

Ces relations induisent alors des règles de réécriture

$$x_ix_j \longrightarrow \sum_{(k,l)<(i,j)} \lambda_{i,j}^{k,l} x_kx_l$$

si bien qu'à chaque éléments de A peut-être associé un diagramme de réécriture. Par exemple, pour $y^3 \in A(x, y : y^2 - x^2, yx - xy)$, on a

$$\begin{tikzcd}
y^3 \arrow[dr] \arrow[ddd] & \\
& yx^2 \arrow[d] \\
& xyx \arrow[dl] \\
x^2y &
\end{tikzcd}$$

et pour $y^3 \in A(x, y : xy - x^2, y^2 - x^2)$, on a

$$\begin{tikzcd} & y^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x^2y \arrow[d] & & yx^2 \\ x^3 & & \end{tikzcd}$$

Les nœuds terminaux dans ces diagrammes sont alors constitués de monômes formant une base de *l'algèbre monomiale* associée à A.

Définition 3.1. *L'algèbre monomiale* associée à une algèbre quadratique de type finie $A = A(V, R)$ est l'algèbre

$$\mathring{A} := A(V, R_{\text{dom}})$$

où R_{dom} est le sous-espace vectoriel de $V^{\otimes 2}$ engendré par le monômes dominants des éléments de R.

Une base de $\mathring{A}$ est alors donnée par les monômes de la forme $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ avec $x_{i_j} x_{i_{j+1}} \notin R_{\text{dom}}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ce sont exactement les mots dont les diagrammes de réécriture sont triviaux. On notera par la suite $\bar{i}$ pour désigner un uplet d'indices $(i_1, \ldots, i_n)$; on notera $L^{(n)}$ l'ensemble des uplets d'indices correspondant aux mots de poids n de la base monomiale de $\mathring{A}$ et $L := \bigsqcup_{n \geqslant 0} L^{(n)}$.

Proposition 3.2. L'algèbre monomiale $\mathring{A}$ est koszul.

Démonstration. Une base de $\mathring{A}^{\text{¡}}$ est donnée par les monômes $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ tels que $x_{i_k} x_{i_{k+1}} \in R_{\text{dom}}$ pour tout k. Notons $L^{\text{¡}}$ l'ensemble des uplets d'indices correspondant à cette base *i.e.* $L^{\text{¡}} = \bigsqcup_{n \geqslant 0} L^{\text{¡}(n)}$ et

$$L^{\text{¡}(n)} = \{(i_1, \ldots, i_n) : x_{i_k} x_{i_{k+1}} \in R_{\text{dom}}, \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Le complexe de Koszul de $\mathring{A}$ admet alors pour base

$$(x_{\bar{i}} \otimes x_{\bar{j}})_{(\bar{i}, \bar{j}) \in L^{\text{¡}} \times L}$$

et la différentielle dans cette base est

$$d(x_{\bar{i}} \otimes x_{\bar{j}}) = (-1)^{n-1} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}} \otimes x_{i_n} x_{\bar{j}}.$$

Si $x_{i_n} x_{j_1} \in R_{\text{dom}}$, alors $d(x_{\bar{i}} \otimes x_{\bar{j}}) = 0$ et on a

$$x_{\bar{i}} \otimes x_{\bar{j}} = d(x_{\bar{i}} x_{j_1} \otimes x_{j_2} \cdots x_{j_m}).$$

Sinon, $d(x_{\bar{i}} \otimes x_{\bar{j}})$ est un élément de la base du complexe de Koszul. En observant de plus que la différentielle est injective sur les éléments de le base qui ne sont pas envoyés vers 0, on a

$$\operatorname{Ker}(d) = \operatorname{Vect}(x_{\bar{i}} \otimes x_{\bar{j}} : x_{i_n} x_{j_1} \in R_{\text{dom}}) = \operatorname{Im}(d)$$

et $\mathring{A}^{\text{¡}} \otimes_\kappa \mathring{A}$ est acyclique.

✿

L'algèbre monomiale $\mathring{A}$ et l'algèbre tensorielle $T(V)$ sont graduées en droites par l'ordre monomiale :

$$T(V) = \bigoplus_{\bar{i} \in I} \mathbb{K}\{x_{\bar{i}}\}, \quad \mathring{A} = \bigoplus_{\bar{i} \in L} \mathbb{K}\{x_{\bar{i}}\}$$

où $I = \bigsqcup_{n \geqslant 0} I^{(n)}$ et $I^{(n)} = \{1, \ldots, d\}^n$. Néanmoins, ce n'est pas forcément le cas pour A puisque R n'est pas forcément homogène pour cette graduation. Néanmoins, la graduation monomiale de $T(V)$ induit une filtration sur $T(V)$: si on pose $F_{\leqslant \bar{i}}(T(V)) := \bigoplus_{0 \leqslant \bar{j} \leqslant \bar{i}} \mathbb{K}\{x_{\bar{j}}\}$, on a

$$F_{\leqslant (1)}(T(V)) \subset F_{\leqslant (2)}(T(V)) \subset \cdots \subset F_{\leqslant (1,1)}(T(V)) \subset F_{\leqslant (1,2)}(T(V)) \subset \cdots$$

et

$$F_{\leqslant \bar{i}}(T(V)) \cdot F_{\leqslant \bar{j}}(T(V)) \subset F_{\leqslant \bar{i}+\bar{j}}(T(V))$$

où $\bar{i} + \bar{j}$ est la concaténation de $\bar{i}$ et $\bar{j}$. Cette filtration de $T(V)$ induit alors une filtration de A en définissant $F_{\leqslant \bar{i}}(A)$ comme la projection de $F_{\leqslant i}(T(V))$ dans A.

Pour comparer l'algèbre graduée $\mathring{A}$ à l'algèbre filtrée A, on introduit l'algèbre graduée associée à A :

$$\operatorname{gr} A := \bigoplus_{\bar{i} \in I} \frac{F_{\leqslant \bar{i}}(A)}{F_{<\bar{i}}(A)} = \bigoplus_{\bar{i} \in I} \operatorname{gr}_{\bar{i}} A$$

où $F_{<\bar{i}}(A)$ est le filtre précédant $F_{\leqslant \bar{i}}(A)$. Le choix d'une base adaptée à la filtration de A induit un isomorphisme linéaire $\operatorname{gr} A \simeq A$ mais un tel isomorphisme ne respecte pas les structures d'algèbres.

Ici, on a une base canonique de $\operatorname{gr} A$ puisque $x_{\bar{i}}$ engendre $F_{\leqslant \bar{i}}(A)/F_{<\bar{i}}(A)$. Attention, certains de ces monômes sont nuls dans $\operatorname{gr} A$: ce sont ceux qui peuvent se réécrire comme somme de monômes strictement plus petits.

Remarque 3.3. Attention, un monôme pouvant se réécrire avec des monômes plus petits peut être terminal pour les règles de réécriture. Par exemple, dans $A(x, y : xy - x^2, y^2 - x^2)$, on a vu que yx^2 est terminal mais peut se réécrire comme x^3. C'est justement la différence entre monômes réécrivables en plus petits mots et monômes terminaux qui forme l'obstruction à la propriété PBW.

Ainsi, si $x_{\bar{i}+\bar{j}} \in A$ s'écrit avec des monômes strictement plus petit :

$$x_{\bar{i}+\bar{j}} = \sum_{\bar{k} < \bar{i}+\bar{j}} \lambda_{\bar{k}} x_{\bar{k}}$$

alors le produit $x_{\bar{i}} \cdot x_{\bar{j}}$ donne $x_{\bar{i}+\bar{j}}$ dans A tandis qu'il est nul dans $\operatorname{gr} A$. Alors que l'isomorphisme $\operatorname{gr} A \simeq A$ envoie $x_{\bar{i}+\bar{j}} \in A$ vers $\bigoplus_{\bar{k}} \lambda_{\bar{k}} x_{\bar{k}} \in \bigoplus_{\bar{k}} \operatorname{gr}_{\bar{k}} A \subset \operatorname{gr} A$.

Proposition 3.4. Le morphisme $V \to \operatorname{gr} A$, envoyant x_i sur $x_i \in \operatorname{gr}_{(i)} A$ induit par propriété universelle un morphisme d'algèbres graduées surjectif se factorisant par $\mathring{A}$:

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
\omega : \mathring{A} = A(V, R_{\mathrm{dom}}) \arrow[r, two heads] & \operatorname{gr} A
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si les monômes terminaux dans les graphes de réécritures ne peuvent s'écrire avec des monômes strictement plus petits.

Démonstration. L'élément $x_{\bar{i}}$ est envoyé vers un générateur de $\operatorname{gr}_{\bar{i}} A$, donc le morphisme $\varphi : T(V) \to \operatorname{gr} A$ est surjectif. De plus, pour toute relation

$$x_i x_j - \sum_{(k,l)<(i,j)} \lambda_{i,j}^{k,l} x_k x_l,$$

on a

$$\varphi(x_i x_j) = x_i x_j \in \operatorname{gr}_{(i,j)} A = \frac{F_{\leqslant (i,j)} A}{F_{<(i,j)} A}.$$

Or, dans A, on a $x_i x_j = \sum_{(k,l)<(i,j)} \lambda_{i,j}^{k,l} x_k x_l \in F_{<(i,j)} A$. Donc, $\varphi(x_i x_j) = 0$ et φ est nul sur R_{dom}. Le morphisme $\varphi : T(V) \to \operatorname{gr} A$ étant surjectif et respectant la graduation monomiale, le morphisme induit

$$\omega : \mathring{A} \to \operatorname{gr} A$$

est surjectif et respecte la graduation monomiale.

Explicitement, on a

$$\omega : \bigoplus_{\bar{i}\in L} \mathbb{K}\{x_{\bar{i}}\} \to \bigoplus_{\bar{i}\in K} \mathbb{K}\{x_{\bar{i}}\}$$

où K est l'ensemble des indices correspondant à des monômes $x_{\bar{i}}$ tels que $x_{\bar{i}} \notin F_{<\bar{i}}A$ *i.e.* $x_{\bar{i}}$ ne peut se réécrire comme somme de monômes strictement plus petits. On a alors $K \subset L$ et ω est un isomorphisme si et seulement si $K = L$.

Exemple 3.5. On a observé que dans $A(x, y : xy - x^2, y^2 - x^2)$, le diagramme de réécriture de y^3 était

$$\begin{tikzcd}
 & y^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x^2y \arrow[d] & & yx^2 \\
x^3 & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, les éléments x^3 et yx^2 sont des éléments distincts de la base monomiale de $\mathring{A}$ mais $\omega(yx^2) = 0$ car $x^3 < yx^2$. Les règles de réécriture étant homogènes vis-à-vis du poids et x^3 étant le plus petit monôme de poids 3, il ne peut pas se réécrire avec des monômes plus petits et $\omega(x^3) \neq 0$.

Quand le diagramme de réécriture d'un monôme amène à un unique nœud terminal, on dit que le diagramme est *confluent*. On a observé dans l'exemple précédent que la non-confluence d'un diagramme de réécriture forme une obstruction à l'injectivité de ω. C'est en fait la seule.

Proposition 3.6. Si les diagrammes de réécriture de tous les monômes de $T(V)$ sont confluents, alors $\omega : \mathring{A} \to \operatorname{gr} A$ est un isomorphisme. On appelle la base monomiale induite sur A une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de A et on dit que A est une algèbre PBW.

Démonstration. Supposons que ω ne soit pas un isomorphisme et montrons qu'il existe un monôme avec un diagramme de réécriture non confluent. Si ω n'est pas un isomorphisme, il existe un monôme $x_{\bar{i}}$ avec $\bar{i} \in L \setminus K$ *i.e.* on ne peut pas appliquer de règle de réécriture à des sous-mots de $x_{\bar{i}}$ mais on a

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j}<\bar{i}} \lambda_{\bar{j}} x_{\bar{j}}.$$

dans A. Cette égalité dans A provient nécessairement d'une suite de zig-zag de réécriture dans $T(V)$:

$$x_{\bar{i}} \longleftarrow \bullet \cdots\cdots \bullet \longrightarrow \sum_{\bar{j}<\bar{i}} \lambda_{\bar{j}} x_{\bar{j}} =: \gamma \in T(V)$$

La première flèche est nécessairement un zig ($\longleftarrow$) car $\bar{i} \in L$ et on peut supposer que la dernière flèche est un zag ($\longrightarrow$) quitte à réécrire γ avec des mots plus petits. Il y a donc nécessairement au moins un zig-zag ($\longleftarrow \bullet \longrightarrow$) dans ce diagramme.

S'il n'y a qu'un zig-zag $\bullet \longleftarrow \alpha \longrightarrow \bullet$ dans le diagramme, alors α est nécessairement un monôme et son diagramme de réécriture n'est pas confluent car $x_{\bar{i}} \neq \gamma$.

S'il y a plusieurs zig-zag et que le premier d'entre eux est $\alpha_{-1} \longleftarrow \alpha \longrightarrow \alpha'_{-1}$, alors α, α_{-1} et α'_{-1} sont tous trois des monômes et on peut réécrire α'_{-1} jusqu'à obtenir un monôme terminal $x_{\bar{k}}$:

$$\begin{tikzcd}
x_{\bar{i}} & \cdots \arrow[l] & \alpha_{-1} \arrow[l] & \alpha \arrow[l] \arrow[r] & \alpha'_{-1} \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] & \gamma \\
 & & & & \vdots \arrow[d] & & \\
 & & & & x_{\bar{k}} & &
\end{tikzcd}$$

Si $x_{\overline{k}} = \gamma$, alors le diagramme de réécriture de α, qui est bien un monôme, n'est pas confluent car $x_{\overline{k}} \neq x_{\overline{i}}$ dans ce cas. Enfin, si $x_{\overline{k}} \neq \gamma$, alors on peut recommencer le raisonnement en remplaçant $x_{\overline{i}}$ par $x_{\overline{k}}$ puisque le diagramme

$$x_{\overline{k}} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \alpha'_{-1} \cdots\cdots \bullet \longrightarrow \gamma$$

admet un zig-zag de moins que l'original. ✿

On observe que ω est un isomorphisme en degré 0, 1 et 2. C'est en degré 3 que certain monôme peuvent admettre un diagramme de réécriture non confluent et c'est essentiellement la seule obstruction au fait que ω soit un isomorphisme.

Proposition 3.7 (Lemme du losange)**.** Si $\omega : \mathring{A} \to \operatorname{gr} A$ est un isomorphisme en poids 3, alors c'est un isomorphisme en tous poids.

Démonstration. Admis (suites spectrales). ✿

Théorème 3.8. Soit $A = A(V, R)$, une algèbre quadratique de type fini telle que V soit muni d'une base ordonnée. Si tous les monômes de degré 3 dans $T(V)$ ont un diagramme de réécriture confluent, alors A est PBW et toute algèbre PBW est koszul.

Démonstration. La confluence pour les monôme de degré 3 implique que ω est un isomorphisme en poids 3 d'après ce que l'on a démontré en proposition 3.6 et cela implique que ω est un isomorphisme en tous poids d'après le lemme du losange. Donc $\operatorname{gr} A$ est koszul car $\mathring{A}$ l'est et A est PBW. Un argument de suite spectrale (encore) permet de démontrer que la koszulité de $\operatorname{gr} A$ implique celle de A. ✿

Exemple 3.9. Pour l'algèbre symétrique $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, les relations sont $x_j x_i = x_i x_j$ pour $i < j$. Les seules monômes de degré 3 *critiques*, *i.e.* sur lesquels on peut appliquer des règles de réécriture sur deux sous-mots différents, sont alors ceux de la forme $x_k x_j x_i$ avec $i < j < k$. Or le diagramme de réécriture d'un tel mot est confluent

$$\begin{tikzcd}
 & x_k x_j x_i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x_j x_k x_i \arrow[d] & & x_k x_i x_j \arrow[d] \\
x_j x_i x_k \arrow[dr] & & x_i x_k x_j \arrow[dl] \\
 & x_i x_j x_k &
\end{tikzcd}$$

et on conclut que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est une algèbre PBW et donc est une algèbre koszul.

Exemple 3.10. Si on reprend l'algèbre $A = A(x, y \ : \ y^2 - x^2, yx - xy)$, les monômes critiques de degré 3 sont y^2x et y^3. Or, leurs diagrammes de réécriture sont tous deux confluents et donc A est PBW et koszul :

$$\begin{tikzcd}
y^2x \arrow[ddd] \arrow[dr] & & y^3 \arrow[ddd] \arrow[dr] & \\
 & yxy \arrow[d] & & yx^2 \arrow[d] \\
 & xy^2 \arrow[dl] & & xyx \arrow[dl] \\
x^2y & & x^3 &
\end{tikzcd}$$

Bibliographie

[AJ13] Matthieu Anel et André Joyal. « Sweedler theory for (co) algebras and the bar-cobar constructions ». In : *arXiv preprint arXiv :1309.6952* (2013). URL : https://arxiv.org/abs/1309.6952.

[LV12] Jean-Louis Loday et Bruno Vallette. *Algebraic operads*. T. 346. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mil11] Joan Millès. « André–Quillen cohomology of algebras over an operad ». In : *Advances in Mathematics* 226.6 (2011), p. 5120-5164. ISSN : 0001-8708. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811000065.

[Mim13] Samuel Mimram. *Notes on Koszul duality (for quadratic algebras)*. 2013. URL : https://www.lix.polytechnique.fr/~smimram/docs/mimram_koszul_notes.pdf.