Du développement en série entière de $1/(1-t)^n$ à la dualité de Koszul

Jules Givelet

Février 2026

Une simple coïncidence ?

On a

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k \geqslant 0} \binom{k+n-1}{n-1} t^k$$

et

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \dim_{\mathbb{K}} \left(S^k(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

où $S^k(x_1, \ldots, x_n)$ est l'espace des polynômes homogènes de degré k en n variables symétriques (*i.e.* $x_i x_j = x_j x_i$).

Je ne crois pas !

En prenant la n-ième puissance de Cauchy de

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k \geqslant 0} t^k,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-t}\right)^n &= (1 + t + t^2 + t^3 + \cdots)^n \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \left| I_n^k \right| \cdot t^k \end{aligned}$$

où

$$I_n^k = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}$$

ce qui correspond exactement à l'ensemble des exposants des monômes homogènes de degré k en n variables.

Algébrisation du calcul précédent

On a $S(x_1, \ldots, x_n) = T(x_1) \otimes \cdots \otimes T(x_n)$ où $T(x) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}x^2 \oplus \cdots = \mathbb{K}[x]$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geqslant 0} \dim(S^k(x_1, \ldots, x_n))t^k &= f^{S(x_1, \ldots, x_n)}(t) \\
&= f^{T(x_1) \otimes \cdots \otimes T(x_n)}(t) \\
&= \left(f^{T(x)}(t)\right)^n \\
&= (1 + t + t^2 + \cdots)^n \\
&= \frac{1}{(1-t)^n}.
\end{aligned}$$

Une autre coïncidence ?

On a

$$(1+t)^n = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k} t^k$$

et

$$\binom{n}{k} = \dim_{\mathbb{K}} \left(\Lambda^k(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

où $\Lambda^k(x_1,\ldots,x_n)$ est l'espace des polynômes homogènes de degré k en n variables anti-symétriques (*i.e.* $x_i x_j = -x_j x_i$).

Toujours pas !

Pour toute algèbre graduée $A = \bigoplus_{k \geqslant 0} A^{(k)}$, on note

$$f^A(t) := \sum_{k \geqslant 0} \dim \left(A^{(k)} \right) t^k.$$

Proposition

Pour tout espace vectoriel V de dimension n, on a

$$f^{\Lambda(V)}(-t) \cdot f^{S(V)}(t) = 1$$

et, plus généralement, on a

$$f^{A^!}(-t) \cdot f^A(t) = 1$$

pour toute algèbre quadratique de Koszul A.

Preuve : algèbre homologique

Le complexe de Koszul associé à $S(V)$ est le complexe de chaînes gradué $\Lambda(V) \otimes S(V)$:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & & 1 & & 0 \\
0 & \xrightarrow{d} & 0 & \xrightarrow{d} & \Lambda^0(V) \otimes S^0(V)
\end{array} \qquad (0)$$

$$0 \xrightarrow{d} \Lambda^1(V) \otimes S^0(V) \xrightarrow{d} \Lambda^0(V) \otimes S^1(V) \qquad (1)$$

$$\Lambda^2(V) \otimes S^0(V) \xrightarrow{d} \Lambda^1(V) \otimes S^1(V) \xrightarrow{d} \Lambda^0(V) \otimes S^2(V) \qquad (2)$$

Preuve : algèbre homologique

La différentielle $d : \Lambda^p(V) \otimes S^q(V) \to \Lambda^{p-1}(V) \otimes S^{q+1}(V)$ envoie un élément $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes y_1 \cdots y_q$ sur

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{p-i} x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_p \otimes x_i y_1 \cdots y_q.$$

La projection de $\Lambda(V) \otimes S(V)$ sur les éléments de poids 0 en fait un complexe gradué **augmenté** :

$$0 \longrightarrow \overline{\Lambda(V) \otimes S(V)} \longrightarrow \Lambda(V) \otimes S(V) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{K}$ est concentré en degré homologique 0.

Preuve : algèbre homologique

Lemme (Koszulité de $S(V)$)

Le complexe $\overline{\Lambda(V) \otimes S(V)}$ est acyclique.

Preuve : On introduit l'homotopie
$h : \Lambda^p(V) \otimes S^q(V) \to \Lambda^{p+1}(V) \otimes S^{q-1}(V)$ envoyant un élément $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes y_1 \cdots y_q$ sur

$$\sum_{j=1}^{q} x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_j \otimes y_1 \cdots \widehat{y_j} \cdots y_q.$$

On a alors $hd + dh = (p+q)\,\mathrm{id}$ et donc $h/(p+q)$ (bien définie car $p+q \neq 0$) est une homotopie entre id et 0.

✿

Preuve : algèbre homologique

Conséquence : la caractéristique d'Euler-Poincaré de $(\Lambda(V) \otimes S(V))^{(k)}$ est

$$\begin{aligned}\delta_{0,k} &= \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \dim \left(H_i \left((\Lambda(V) \otimes S(V))^{(k)} \right) \right) \\ &= \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \dim \left(\Lambda^i(V) \otimes S^{k-i}(V) \right) \quad \text{(Formule d'Euler-Poincaré)} \\ &= \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \dim \left(\Lambda^i(V) \right) \dim \left(S^{k-i}(V) \right)\end{aligned}$$

ce qui correspond au k-ième coefficient de $f^{\Lambda(V)}(-t) f^{S(V)}(t)$.
Donc,

$$f^{\Lambda(V)}(-t) f^{S(V)}(t) = \sum_{k \geqslant 0} \delta_{0,k} t^k = 1.$$

Dualité de Koszul en général

Si A admet une présentation quadratique, *i.e.*

$$A = \frac{T(V)}{(R)}$$

où $R \subset V^{\otimes 2}$, alors l'algèbre duale de Koszul de A est

$$A^! = \frac{T(V^*)}{(R^\perp)}$$

où $R^\perp \subset (V^*)^{\otimes 2} \simeq (V^{\otimes 2})^*$. On dit que A est de Koszul si le complexe de Koszul augmenté associé $A^! \otimes A$ est acyclique.

Dualité de Koszul en général

Un autre exemple quadratique est $T(V)^! = D(V) = \frac{T(V)}{(V^{\otimes 2})}$.
On peut aussi adapter la théorie aux algèbres quadratiques linéaires comme

$$U(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{(gh - hg - [g,h])}.$$

$$q(U(\mathfrak{g})) = \frac{T(\mathfrak{g})}{(gh - hg)} = S(\mathfrak{g})$$

$$U(\mathfrak{g})^! = (q(U(\mathfrak{g}))^!, d_\varphi) = (\Lambda(\mathfrak{g}), d_\varphi)$$

où $d_\varphi(g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}[g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{g_j} \wedge \cdots \wedge g_n$ est naturellement associée à φ : $\begin{array}{rcl} qR & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ gh - hg & \longmapsto & [g,h] \end{array}$.

Complexe de Chevalley-Eilenberg

Le complexe de Koszul associé est

$$CE(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g})^! \otimes U(\mathfrak{g}) = (\Lambda(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), d + d_\varphi)$$

où $d + d_\varphi$ envoie un élément $g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes u$ sur

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_i} \wedge \cdots \wedge g_n \otimes g_i u$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j-1} [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{g_j} \wedge \cdots \wedge g_n \otimes u.$$

C'est une résolution de $\mathbb{K}$ par des $\mathfrak{g}$-modules à droite libres si bien que, pour tout $\mathfrak{g}$-modules à droite M,

$$H^\bullet(\mathrm{Hom}(CE(\mathfrak{g}), M)) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}}(\mathbb{K}, M).$$

Merci pour votre attention !

Bonus (work in progress...)

On peut essayer de généraliser l'histoire précédente aux algèbres de Leibniz.

Définition

Une algèbre de Leibniz (à gauche) est un espace vectoriel L muni d'un produit bilinéaire $[-,-]$ tel que pour $a, b, c \in L$

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]].$$

L'enveloppant d'une algèbre de Leibniz et sa duale de Koszul sont

$$\frac{T(L \oplus L)}{\begin{pmatrix} \rho_{[a,b]} - \rho_b\rho_a - \lambda_a\rho_b \\ \lambda_a\rho_b - \rho_b\lambda_a - \rho_{[a,b]} \\ \lambda_a\lambda_b - \lambda_{[a,b]} - \lambda_b\lambda_a \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} (qU_{\mathcal{L}eib}(L))^! &= \frac{T(L^* \oplus L^*)}{\begin{pmatrix} \lambda_a^*\lambda_b^* + \lambda_b^*\lambda_a^* \\ \rho_b^*\lambda_a^* - (\rho_b^*\rho_a^* - \lambda_a^*\rho_b^*) \end{pmatrix}} \\ &\simeq \Lambda(L^*) \otimes T(L^*) \end{aligned}$$