Travail Encadré de Recherche de M1
Espaces de Stone

Baptiste Dugué
Jules Givelet
Encadré par Bernard Le Stum

19 mars 2025

Introduction

Le but de ce mémoire est d'étudier les espaces de Stone et leur place dans la catégorie des espaces compacts. Pour ce faire nous dresserons le portrait de ces espaces à travers trois résultats. Le premier met en évidence la structure de limite inverse des espaces de Stone avec la notion d'espace profini aujourd'hui mise en avant dans le domaine des mathématiques condensées développé par Scholze et Clausen. Nous démontrerons ensuite de manière plus précise que les objets projectifs dans la catégorie des compacts sont exactement les espaces de Stone que l'on peut obtenir comme rétracts de compactification de Stone-Čech. Enfin, nous ferons la démonstration du théorème de représentation de Stone (1936), ce résultat étant la première raison qui a poussé Marshall Stone à étudier ces espaces.

Table des matières

1 Espace de Stone et limite inverse

1.1 Topologie des espaces de Stone

Dans tout ce qui suivra, on entend par « espace séparé » un espace Hausdorff. Tous les espaces compacts seront supposés séparés et on dira qu'ils sont « quasi-compact » si ce n'est pas le cas.

Définition 1.1.1. Soit X un espace topologique. On dit que X est *totalement discontinu* si les seules parties non vides connexes de X sont ses singletons. On dit que X est un *espace de Stone* s'il est totalement discontinu et compact.

Exemples.

— Tout espace discret est totalement discontinu car les singletons y sont ouverts. Donc en particulier, tout ensemble fini discret est un espace de Stone.

— L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ est totalement discontinu. En particulier, toute partie compacte de $\mathbb{Q}$ est un espace de Stone (*cf.* proposition 1.1.1).

— Plus généralement, toute partie non vide de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide est totalement discontinue.

Proposition 1.1.1.

(i) *Un produit d'espaces totalement discontinus est totalement discontinu.*

(ii) *Une partie d'un espace totalement discontinu est totalement discontinue.*

Démonstration. Preuve de (i) : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces totalement discontinus. Soit $A \subset \prod_{i\in I} X_i$ munie de la topologie induite. On note $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ la surjection canonique. Si A n'est pas réduit à un singleton, il existe $i \in I$ tel que $p_i(A)$ n'est pas réduit à un singleton. Or, X_i est totalement discontinu, donc $p_i(A)$ n'est pas connexe et donc A non plus par continuité de p_i.

Preuve de (ii) : Soit X un espace totalement discontinu et $A \subset X$ munie de la topologie induite. Soit $B \subset A$ une partie non vide. Si B n'est pas réduit à un singleton, il n'est pas connexe pour la topologie induite par celle de X et donc aussi par celle de A (ces topologies sur B sont les mêmes). ✿

Définition 1.1.2. Soit X un espace topologique. On dit que X est *totalement séparé* si pour toute paire de points distincts $x, y \in X$, il existe un voisinage ouvermé (ouvert-fermé) de x qui ne contient pas y.

Si les ouvermés de X forment une base d'ouverts, on dit que X est *de dimension* 0 (abrégé en X est de dim 0).

Comme dans la proposition 1.1.1, on peut montrer que ces propriétés passent à la topologie produit et à la topologie induite. Ces notions topologiques sont caractéristiques des espaces de Stone. Par exemple, on peut déjà établir la proposition suivante :

Proposition 1.1.2. *Soit X un espace topologique.*

(i) *Si X est totalement séparé, alors X est totalement discontinu.*

(ii) *Si X est séparé et de dim 0, alors X est totalement séparé.*

Démonstration. Preuve de (i) : Soit $A \neq \emptyset$ une partie de X non réduite à un singleton. Soient $x, y \in A$ deux points distincts. Comme X est totalement séparé, on peut les séparer par un voisinage ouvermé U de x ne contenant pas y. Ainsi, U et $U^c := X \setminus U$ sont ouverts et induisent une partition en ouverts disjoints non vides de A puisque $x \in U \cap A$ et $y \in U^c \cap A$. Donc A, n'est pas connexe et X est totalement discontinu.

Preuve de (ii) : Soit $x, y \in X$ deux points distincts. Comme X est séparé, on peut séparer x et y par un ouvert $U \ni x$ qui ne contient par y. Or, X est de dim 0, donc il existe des ouvermés $(G_i)_{i\in I}$ tels que $U = \bigcup_{i\in I} G_i$. Il existe alors $i \in I$ tel que $x \in G_i$ et on a bien $y \in U^c \subset G_i^c$. Donc, G_i est un ouvermé séparant x et y et donc X est totalement séparé. ✿

Remarque. Dans la preuve de l'assertion (ii), on ne considère qu'un voisinage ouvert de l'un des deux points pour les séparer si bien que l'on peut remplacer l'hypothèse de séparation habituelle T_2 par l'hypothèse T_0 des espaces de Kolmogorov.

Exemples.

- L'espace des suites rationnelles de carrés sommables $\ell^2(\mathbb{Q})$ est totalement séparé mais pas de dim 0.
- L'éventail de Knaster-Kuratowski sur l'ensemble de Cantor est l'ensemble $\bigsqcup_{c\in C} S(c)$, où $C \subset [0,1]$ est l'ensemble de Cantor et où $S(c)$ représente les points du segment $[c, (1/2, 1/2)]$ dans $\mathbb{R}^2$ à ordonnée rationnelle si c est une extrémité d'un segment ouvert retiré dans le processus de création de C et à ordonnée irrationnelle sinon. Cet éventail privé de son sommet (le point $(1/2, 1/2)$) est totalement discontinu mais pas totalement séparé.

Dans le cas des espaces compacts, on peut remonter le fil des implications. Pour le voir, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Soit X un espace topologique compact. Alors pour toute paire de fermés disjoints $F_1, F_2 \subset X$, il existe des ouverts $U \supset F_1$ et $V \supset F_2$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et en particulier $\overline{U} \cap F_2 = \emptyset$.*

Démonstration. *Cf.* annexe I proposition I.1. ✿

Proposition 1.1.3. *Soit X un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'espace X est un espace de Stone.

(ii) L'espace X est compact et totalement séparé.

(iii) L'espace X est compact et de dim 0.

Démonstration. On sait d'après la proposition 1.1.2 que $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Remontons alors le courant.
Preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $x \in X$, posons

$$C(x) := \{y \in X \mid \exists G \subset X \text{ ouvermé, } x \in G \text{ et } y \in G^c\}^c$$

l'ensemble des points ne pouvant être séparés de x par un ouvermé. On a bien sûr $x \in C(x)$. Montrer que X est totalement séparé revient à montrer que $C(x) = \{x\}$ pour tout $x \in X$ ce qui revient à montrer que $C(x)$ est connexe puisque X est totalement discontinu. Remarquons dans un premier temps que $C(x)$ est fermée :

Soit $y \in C(x)^c$. Par définition de $C(x)$, on peut séparer y de x par V un voisinage ouvermé de y. Un tel voisinage est un voisinage ouvermé de tous ses propres points et sépare ceux-ci de x. Donc $V \subset C(x)^c$ et $C(x)$ est fermée.

Ainsi, pour montrer que $C(x)$ est connexe, on suppose que l'on peut écrire $C(x) = F_1 \sqcup F_2$ avec F_1 et F_2 des traces de fermés de X (comme $C(x)$ est fermée, F_1 et F_2 sont fermées dans X) et on montre que F_1 ou F_2 est vide. Comme X est compact, on peut trouver (d'après le lemme 1) un ouvert $U \supset F_1$ tel que $\overline{U} \cap F_2 = \emptyset$. On définit la frontière $\partial U := \overline{U} \cap U^c$ et on a alors $\partial U \cap C(x) = \emptyset$. Donc, pour tout $y \in \partial U$ il existe un ouvermé $G_y \ni y$ tel que $x \notin G_y$ et en particulier $G_y \subset C(x)^c$. On obtient alors un recouvrement ouvermé de ∂U :

$$\partial U \subset \bigcup_{y\in\partial U} G_y \subset C(x)^c.$$

Or ∂U est fermée dans X qui est compact donc ∂U est compact et on a :

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{y_i} =: G \subset C(x)^c.$$

La partie G est alors ouvermée. Posons $V := U \cap G^c = \overline{U} \cap G^c$ (car $\partial U \cap G^c = \emptyset$) qui est clairement ouvermé. On a $C(x) \cap V = C(x) \cap U \cap G^c = F_1 \cap G^c = F_1$ car $F_1 \subset C(x) \subset G^c$. Or, pour tout ouvermé H, ou bien $x \in H$ donc $C(x) \subset H$ et $C(x) \cap H = C(x)$, ou bien $x \notin H$ et $C(x) \cap H = \emptyset$. Donc $F_1 \in \{C(x), \emptyset\}$ ce qui prouve que $C(x)$ est connexe et X est totalement séparé.

Preuve de $(ii) \Rightarrow (iii)$: Soit U un ouvert de X et soit $x \in U$. On va construire un ouvermé V_x tel que $x \in V_x \subset U$ si bien que $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ et donc X est de dim 0. Pour tout $y \in U^c$, il existe V_y, un voisinage ouvermé de x tel que $y \notin V_y$. On obtient alors un recouvrement ouvert de U^c :

$$U^c \subset \bigcup_{y \in U^c} {V_y}^c.$$

Or U^c est fermé dans X qui est compact donc U^c est compact et on a :

$$U^c \subset \bigcup_{i=1}^{n} {V_{y_i}}^c.$$

Ainsi, si on pose $V_x := \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} \subset U$, V_x est bien un voisinage ouvermé de x. ✿

1.2 Limite inverse dans la catégorie des espaces topologiques

Définition 1.2.1. Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit que I est *filtrant à droite* si pour tout $i, j \in I$ il existe $k \in I$ tel que $i, j \leqslant k$.

Un *système projectif* (d'espaces topologiques) est la donnée d'espaces topologiques $(X_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble ordonné filtrant à droite et d'une application continue $f_{i,j} : X_i \to X_j$ pour tout couple d'indices (i, j) tel que $i \geqslant j$ vérifiant :

$$\forall i \in I,\ f_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i} \ \text{ et } \ \forall i \geqslant j \geqslant k,\ f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}.$$

On notera alors $(X_i, f_{i,j})_I$ pour désigner un tel système.

Exemple. Soit p un nombre premier. On prend $I = \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$ on prend $X_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de la topologie quotient qui est alors la topologie discrète car $\mathbb{Z}$ est discret. Si $n \geqslant m$, on a $p^m | p^n$ et donc $\pi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ induit une application continue

$$\mathrm{id}_{n,m} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}.$$

Il n'est pas difficile de voir la fonctorialité des $\mathrm{id}_{n,m}$ par propriété universelle du quotient et on obtient donc un système projectif $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{n,m})_{\mathbb{N} \geqslant 1}$.

Définition 1.2.2. Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif. Un *cône* sur $(X_i, f_{i,j})_I$ est la donnée d'un espace topologique Y et d'une application continue $\varphi_i : Y \to X_i$ pour tout $i \in I$ vérifiant :

$$\forall i \geqslant j,\ f_{i,j} \circ \varphi_i = \varphi_j.$$

On notera alors $(Y, \varphi_i)_I$ pour désigner un tel cône.

Le diagramme commutatif suivant représente un cône $(Y, \varphi_i)_I$ sur le système projectif $(X_i, f_{i,j})_I$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y \arrow[dl, "\varphi_{j_1}"] \arrow[dr, "\varphi_k"] \arrow[ddll, "\varphi_i"'] \arrow[dd, "\varphi_{j_2}"] & & \\
 & & X_{j_1} \arrow[rr] & & X_k \arrow[r] & {} \\
 {} \arrow[r] & X_i \arrow[ur] \arrow[rr] & & X_{j_2} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.2.3. Un *morphisme de cônes* sur $(X_i, f_{i,j})_I$ de $(Y_1, \varphi_i)_I$ vers $(Y_2, \psi_i)_I$ est une application continue $g : Y_1 \to Y_2$ telle que pour tout $i \in I$, $\psi_i \circ g = \varphi_i$. On note alors $g : (Y_1, \varphi_i)_I \to (Y_2, \psi_i)_I$.

Le digramme commutatif suivant représente un morphisme de cônes $g : (Y_1, \varphi_i)_I \to (Y_2, \psi_i)_I$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y_1 \arrow[d, "g"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[dddll] \arrow[ddd] & & \\
 & & & Y_2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll] \arrow[dd] & & \\
 & & X_{j_1} \arrow[rr] & & X_k \arrow[r] & {} \\
 {} \arrow[r] & X_i \arrow[ur] \arrow[rr] & & X_{j_2} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Il n'est pas difficile de montrer que les identités des cônes et les compositions de morphismes de cônes sont des morphismes de cônes. Ainsi, on peut construire la catégorie $(\Delta \downarrow X)$ des cônes sur un système projectif $(X_i, f_{i,j})_I$. Remarquons que si Z est un espace topologique, que $(Y, \varphi_i)_I$ est un objet de $(\Delta \downarrow X)$ et que $g : Z \to Y$ est une application continue, alors $(Z, \varphi_i \circ g)_I$ est aussi un objet de $(\Delta \downarrow X)$ et g devient automatiquement un morphisme de cône.

Définition 1.2.4. Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif. On dit qu'un cône $(L, \varphi_i)_I$ sur $(X_i, f_{i,j})_I$ est une limite inverse de $(X_i, f_{i,j})_I$ si $(L, \varphi_i)_I$ est un objet final de $(\Delta \downarrow X)$. C'est à dire que pour tout cône $(Y, \psi_i)_I$ sur $(X_i, f_{i,j})_I$, il existe un unique morphisme de cônes $\psi : (Y, \psi_i)_I \to (L, \varphi_i)_I$.

La propriété universelle des limites inverses permet d'établir leur « unicité ». Plus précisément, deux limites inverses d'un même système projectif sont homéomorphes par l'unique morphisme de cône existant entre elles (*cf.* annexe II). De plus il suffit qu'un espace topologique soit homéomorphe à une limite inverse pour le munir d'une structure de cône comme décrit dans le paragraphe précédent, faisant de lui aussi une limite inverse.

Ainsi, on peut parler de « la » limite inverse de système projectif et celle-ci peut toujours être construite comme suit.

Proposition 1.2.1. *Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif. La partie de l'espace produit $\prod_{i \in I} X_i$ définie par*

$$\varprojlim_{i \in I} X_i := \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; \forall i \geqslant j,\ f_{i,j}(x_i) = x_j \right\}$$

munie de la topologie induite et des restrictions des projections $p_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ est une limite inverse de $(X_i, f_{i,j})_I$.

Démonstration. Montrons que $\left(\varprojlim_{i\in I} X_i, p_{i|}\right)_I$, avec $p_{i|} := p_{i|\varprojlim_{i\in I} X_i}$, est bien un cône sur le système $(X_i, f_{i,j})_I$. Soit $x = (x_k)_{k\in I} \in \varprojlim_{i\in I} X_i$ et $i \geqslant j$ des éléments de I. On a alors $f_{i,j}(x_i) = x_j$ et donc $f_{i,j} \circ p_{i|}(x) = p_{j|}(x)$.

Montrons maintenant la propriété universelle. On considère un autre cône $(Y, \varphi_i)_I$, on doit construire une application $\varphi : Y \to \varprojlim_{i\in I} X_i$ tel que le diagramme suivant commute pour tout $i \geqslant j$:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[ddl, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, "\varphi_j"] \arrow[d, dotted, "\varphi"] & \\
 & \varprojlim_{i\in I} X_i \arrow[dl, "p_{i|}"] \arrow[dr, "p_{j|}"'] & \\
X_i \arrow[rr, "f_{i,j}"'] & & X_j
\end{tikzcd}$$

En particulier, on souhaite que $p_i \circ \varphi = \varphi_i$. Or, par propriété universelle du produit, il existe une unique application continue $\varphi : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ telle que $p_i \circ \varphi = \varphi_i$. Reste à vérifier que l'image de φ est contenue dans $\varprojlim_{i\in I} X_i$. Soit $y \in Y$ et $i \geqslant j$ dans I, on a $f_{i,j}(p_i(\varphi(y))) = f_{i,j}(\varphi_i(y)) = \varphi_j(y) = p_j(\varphi(y))$ car $(Y, \varphi_i)_I$ est un cône sur $(X_i, f_{i,j})_I$. ✿

Exemple. Si l'on reprend le système projectif $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{n,m})_{\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ dans l'exemple après la définition 1.2.1, sa limite inverse est l'anneau des entier p-adique notée $\mathbb{Z}_p$. Un élément de $\mathbb{Z}_p$ consiste alors en une suite $([a_n])_{n\geqslant 1}$ avec $[a_n] \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et telle que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $a_n \equiv a_{n+1}\ [p^n]$.

Étudions maintenant les spécificités des limites inverses dans la catégorie des espaces topologiques.

Proposition 1.2.2. *Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif. Si pour tout $i \in I$, X_i est séparé, alors $\varprojlim_{i\in I} X_i$ est fermée dans $\prod_{i\in I} X_i$.*

Démonstration. Montrons que $\left(\varprojlim_{i\in I} X_i\right)^c$ est voisinage de tous ses points. On considère une suite $(x_i)_{i\in I} \in \left(\varprojlim_{i\in I} X_i\right)^c$. Il existe alors $r, s \in I$ tels que $r \geqslant s$ et $f_{r,s}(x_r) \neq x_s$. Or X_s est séparé donc il existe des ouverts $U \ni f_{r,s}(x_r)$ et $V \ni x_s$ de X_s tels que $U \cap V = \emptyset$. Par continuité de $f_{r,s}$ en x_r, il existe un ouvert $U' \ni x_r$ de X_r tel que $f_{r,s}(U') \subset U$. Posons $W := U' \times V \times \prod_{i\in I\setminus\{r,s\}} X_i$. C'est un ouvert de $\prod_{i\in I} X_i$. Il contient la suite $(x_i)_{i\in I}$ puisque $x_r \in U'$ et $x_s \in V$. Enfin, $W \subset \left(\varprojlim_{i\in I} X_i\right)^c$ car si $(y_i)_{i\in I} \in W$, on a $y_r \in U'$, donc $f_{r,s}(y_r) \in U \subset V^c$ et $y_s \in V$, donc en particulier $f_{r,s}(y_r) \neq y_s$. ✿

Corollaire 1.2.3. *Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif. Si pour tout $i \in I$, X_i est compact, alors $\varprojlim_{i\in I} X_i$ est compacte.*

Démonstration. D'après le théorème de Tikhonov, $\prod_{i\in I} X_i$ est compact. De plus, X_i est séparé pour tout $i \in I$, donc d'après la proposition 1.2.2, $\varprojlim_{i\in I} X_i$ est compacte car fermée dans un compact. ✿

Proposition 1.2.4. *Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif d'espaces séparés. Soit $(Y, \varphi_i)_I$ un cône compact sur $(X_i, f_{i,j})_I$. Si pour tout $i \in I$, φ_i est surjective, alors l'application induite $\varphi : Y \to \varprojlim_{i\in I} X_i$ est surjective.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} X_i$. Montrons que $\varphi^{-1}\left(\{(x_i)_{i\in I}\}\right) \neq \emptyset$. Pour cela, posons $Y_i := \varphi_i^{-1}(\{x_i\})$ pour tout $i \in I$, de telle manière que

$$\varphi^{-1}\left(\{(x_i)_{i\in I}\}\right) = \bigcap_{i\in I} Y_i.$$

Comme φ_i est surjective, on sait que $\underline{Y_i \neq \emptyset}$ pour tout $i \in I$. De plus, comme X_i est séparé, $\{x_i\}$ est fermé dans X_i et donc $\underline{Y_i \text{ est fermée}}$ dans Y par continuité de φ_i.

Remarquons maintenant que pour tout $i, j \in I$, $\underline{\text{si } i \geqslant j, \text{ alors } Y_i \subset Y_j}$. En effet, si $y \in Y_i$ et $i \geqslant j$, alors $\varphi_j(y) = f_{i,j}(\varphi_i(y)) = f_{i,j}(x_i) = x_j$ car $(x_i)_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} X_i$. On peut alors montrer que la famille $(Y_i)_{i\in I}$ a ses intersections finies non vides. En effet, soit $i_1, \cdots, i_n \in I$. Comme I est filtrant à droite, il existe $m \in I$ tel que $m \geqslant i_1, \cdots, i_n$ et donc d'après la remarque précédente, on a

$$\emptyset \neq Y_m \subset \bigcap_{k=1}^{n} Y_{i_k}.$$

Ainsi, par compacité de Y, on peut conclure que $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$. ✿

1.3 Espace profini

Définition 1.3.1. Un espace topologique est dit *profini* s'il est la limite inverse d'un système projectif composé d'espaces finis discrets.

Le but de cette section est d'établir le théorème suivant :

Théorème 1. *Un espace topologique est profini si et seulement s'il est un espace de Stone.*

Le sens direct de cette assertion est facile à prouver. Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif d'espaces finis discrets. Les X_i sont discrets, donc totalement discontinus et donc $\varprojlim_{i\in I} X_i$ l'est aussi comme partie de leur produit d'après la proposition 1.1.1. De plus, ils sont finis, donc compacts et donc $\varprojlim_{i\in I} X_i$ est compact d'après le corollaire 1.2.3.

Pour la réciproque, la stratégie est la suivante :

1 On associe à un espace topologique X un système projectif $(X_i, f_{i,j})_I$ et des applications continues surjectives $\pi_i : X \to X_i$ faisant de $(X, \pi_i)_I$ un cône sur ce système.

2 On montre que si X est (quasi-)compact, alors les X_i sont finis et discrets si bien que $\varprojlim_{i\in I} X_i$ est profini (et donc compact d'après le sens direct).

3 On considère l'application induite $\pi : X \to \varprojlim_{i\in I} X_i$ qui est surjective si X est compact d'après la proposition 1.2.4 ; fermée car entre un compact et un séparé et on montre qu'elle est injective si X est en plus totalement discontinu.

1

Définition 1.3.2. Une relation d'équivalence ρ sur un espace topologique X est dite *ouverte* si les classes d'équivalences modulo ρ sont ouvertes dans X. On note $\mathcal{R}_X$ l'ensemble des relations ouvertes sur X et $\pi_\rho : X \to X/\rho$ la surjection canonique.

Proposition 1.3.1. *Soit X un espace topologique. On peut ordonner $\mathcal{R}_X$ avec la relation $\leqslant$ définie comme suit :*

$$\rho \geqslant \rho' \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \pi_\rho(x) \subset \pi_{\rho'}(x).$$

L'ensemble ordonné $(\mathcal{R}_X, \leqslant)$ est alors filtrant à droite.

Démonstration. Cf. annexe III. ✿

Soit ρ et ρ' des relations ouvertes sur un espace topologique X telles que $\rho \geqslant \rho'$. Soit $x, y \in X$ tels que $x\rho y$. On a alors $x \in \pi_\rho(x) = \pi_\rho(y) \subset \pi_{\rho'}(y)$, donc $\pi_{\rho'}(x) = \pi_{\rho'}(y)$. Ainsi, L'application $\pi_{\rho'} : X \to X/\rho'$ passe au quotient en une unique application continue $f_{\rho,\rho'} : X/\rho \to X/\rho'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_\rho"'] \arrow[dr, "\pi_{\rho'}"] & \\ X/\rho \arrow[rr, dotted, "f_{\rho,\rho'}"'] & & X/\rho' \end{tikzcd}$$

L'unicité nous permet d'affirmer que si $\rho \geqslant \rho' \geqslant \rho''$, alors $f_{\rho,\rho} = \mathrm{id}_{X/\rho}$ et $f_{\rho',\rho''} \circ f_{\rho,\rho'} = f_{\rho,\rho''}$ en observant que les diagramme suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_\rho"'] \arrow[dr, "\pi_\rho"] & \\ X/\rho \arrow[rr, "\mathrm{id}_{X/\rho}"'] & & X/\rho \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_\rho"'] \arrow[d, "\pi_{\rho'}"] \arrow[dr, "\pi_{\rho''}"] & \\ X/\rho \arrow[r, "f_{\rho,\rho'}"'] & X/\rho' \arrow[r, "f_{\rho',\rho''}"'] & X/\rho'' \end{tikzcd}$$

Ainsi, $(X, \pi_\rho)_{\mathcal{R}_X}$ est un cône sur le système projectif $(X/\rho, f_{\rho,\rho'})_{\mathcal{R}_X}$.

2

Proposition 1.3.2. *Si X est un espace quasi-compact, alors pour tout $\rho \in \mathcal{R}_X$, X/ρ est fini discret et $\varprojlim_{\rho \in \mathcal{R}_X} X/\rho$ est profini.*

Démonstration. Si ρ est une relation ouverte sur X, les éléments de X/ρ sont des ouverts de X. Donc pour tout $A \subset X/\rho$, on a

$$\pi_\rho^{-1}(A) = \bigcup_{U \in A} U,$$

donc $\pi_\rho^{-1}(A)$ est ouvert et A aussi par définition de la topologie quotient. Donc X/ρ est discret.

De plus, X/ρ est fini car les éléments de X/ρ forment un recouvrement en ouverts disjoint de X. Or, par la propriété de Borel-Lebesgue, un tel recouvrement est nécessairement fini. ✿

3 Soit X un espace de Stone et $\pi : X \to \varprojlim_{\rho \in \mathcal{R}_X} X/\rho$ l'application continue surjective et fermée comme précisé au début de cette section. Montrons que π est injective. Soit $x, y \in X$ deux éléments distincts. Comme X est un espace de Stone, il est totalement séparé d'après la proposition 1.1.3 et il existe un voisinage ouvermé G de x ne contenant pas y. On considère la relation ρ telle que $X/\rho = \{G, G^c\}$. Cette relation est ouverte car G et G^c sont ouverts dans X. On a alors $p_\rho \circ \pi(x) = \pi_\rho(x) \neq \pi_\rho(y) = p_\rho \circ \pi(y)$ donc $\pi(x) \neq \pi(y)$ et on a bien un homéomorphisme

$$\boxed{\pi : X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\rho \in \mathcal{R}_X} X/\rho\,.}$$

2 Caractérisation des compacts projectifs

2.1 Objet projectif et espace extrêmement discontinu

Définition 2.1.1. Un espace compact X est dit *projectif* si pour toute application continue surjective $p : E \to Q$ entre deux espaces compacts et pour toute application continue $f : X \to Q$ il existe une application continue $\tilde{f} : X \to E$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

Remarque. La notion d'objet projectif se généralise à toute catégorie en remplaçant les compacts par les objets de la catégorie, les applications continues par les morphismes et les applications continues surjectives par les épimorphismes.

Exemples.

— Dans la catégorie des ensembles **Ens**, tout objet est projectif. En effet, si on considère le diagramme de la définition précédente, on peut définir $\tilde{f}$ en associant à tout $x \in X$ un élément de $p^{-1}(\{f(x)\}) \neq \emptyset$.

— De même, tout espace discret est projectif dans la catégorie des espaces topologiques **Top** et tout espace discret fini est projectif dans la catégorie des espaces compacts.

Tout espace topologique projectif est en fait un rétracte d'un espace discret. En effet, si X est projectif, on considère l'espace discret DX dont l'ensemble sous-jacent est X et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & DX \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{\mathrm{id}_X}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X \end{tikzcd}$$

— Originellement, la notion d'objet projectif est une notion algébrique. On peut montrer que pour tout anneau A, les A-module projectifs sont les facteurs directs de A-modules libres. Et de la même manière qu'on peut montrer que tout facteur direct d'un A-module projectif est projectif on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 2.1.1. *Tout rétracte de compact projectif est un compact projectif.*

Démonstration. Soit P un compact projectif et X un rétracte de P. On note $i : X \to P$ et $\pi : P \to X$ les applications continues telles que $\pi \circ i = \mathrm{id}_X$. La topologie de X est à la fois la topologie induite de i et la topologie quotient de π (*cf.* annexe IV). Donc, X est séparé car homéomorphe à une partie de P qui l'est et donc X est compact car c'est l'image continue de P par la rétraction.

Montrons que X est projectif en considérant une application surjective continue $p : E \to Q$ avec E et Q compacts et une application continue $f : X \to Q$. Comme P est un compact projectif, il existe une application continue $\widetilde{f \circ \pi} : P \to Q$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[d, "p"] \\ P \arrow[urr, "\widetilde{f\circ\pi}"] \arrow[r, shift left, "\pi"] & X \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r, "f"'] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_X"] & Q \end{tikzcd}$$

Ainsi, on peut relever f en posant $\tilde{f} = \widetilde{f \circ \pi} \circ i$. ✿

Les compacts projectifs sont étroitement liés aux espaces de Stone, plus précisément aux espaces compacts extrêmement discontinus.

Définition 2.1.2. Un espace topologique est *extrêmement discontinu*[1] si l'adhérence de toute partie ouverte est elle-même ouverte.

1. Ou encore extrémalement discontinu si l'on souhaite rester le plus fidèle possible au terme d'origine américaine « extremally disconnected ».

Exemples.

- Les espaces discrets sont extrêmement discontinus. Plus étonnant peut-être, les espaces munis de la topologie grossière sont à la fois connexes et extrêmement discontinus.
- Les espaces munis de la topologie cofinie sont extrêmement discontinus. Les espaces cofinis de cardinal infini fournissent alors encore des exemples d'espaces connexes extrêmement discontinus.
- La compactification de Stone-Čech d'un espace discret (*cf.* section 2.3) est extrêmement discontinue.

Le lien avec les espaces de Stone ne saute pas aux yeux au premier abord. Pour l'établir, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2. *Soit X un espace extrêmement discontinu et $U, V \subset X$ des parties ouvertes. Si $U \cap V = \emptyset$, alors $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Démonstration. Si $U \cap V = \emptyset$, alors $U \subset V^c$ et comme V est ouverte, on a $\overline{U} \subset V^c$. On a alors $V \subset \overline{U}^c$ et de même, comme $\overline{U}$ est ouverte en vertu de l'extrême discontinuité de X, on a $\overline{V} \subset \overline{U}^c$ et donc $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. ✿

Proposition 2.1.2. *Un espace séparé et extrêmement discontinu est totalement séparé et donc totalement discontinu (*sic*),* cf. *proposition 1.1.2.*

Démonstration. Soit X un espace séparé et extrêmement discontinu. Soit $x, y \in X$ deux points distincts. Comme X est séparé, il existe des ouvert disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$. D'après le lemme précédent, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont aussi disjoints et forment alors des voisinages ouvermés respectivement de x et de y. ✿

Remarque. Ainsi, la catégorie des compacts extrêmement discontinus forme une sous-catégorie de celle des espaces de Stone si bien qu'on appelle aussi parfois ces espaces des espaces Stoniens.

2.2 Caractérisation de Gleason

Le prochain théorème est dû à Gleason qui a mis en exergue l'extrême discontinuité des compacts projectifs. Ainsi, il a montré l'existence de résolutions projectives dans la catégorie des espaces topologique de la même manière qu'en algèbre.

Théorème 2 (Gleason)**.** *Un espace compact est un compact projectif si et seulement s'il est extrêmement discontinu.*

Le sens direct de ce théorème n'est pas difficile à démontrer. Le sens réciproque, lui, est beaucoup plus technique. Ainsi, nous feront la preuve de ce théorème en deux temps.

Proposition 2.2.1. *Un compact projectif est extrêmement discontinu.*

Démonstration. Soit X un espace compact projectif. Soit $U \subset X$ une partie ouverte, démontrons que $\overline{U}$ est aussi ouverte. Dans l'espace produit compact $X \times \{0,1\}$ (avec $\{0,1\}$ discret), on considère $Y := (U^c \times \{0\}) \sqcup \big(\overline{U} \times \{1\}\big)$. Cette partie est fermée dans $X \times \{0,1\}$ car U est ouverte dans X, donc Y est compact. On note l'inclusion canonique $i : Y \to X \times \{0,1\}$ et la projection canonique $p : X \times \{0,1\} \to X$. Comme $U^c \cup \overline{U} = X$, l'application $p \circ i : Y \to X$ est surjective et comme X est projectif, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "p\circ i"] \\
X \arrow[ur, "\widetilde{\mathrm{id}_X}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

Le but est de montrer que $\overline{U} = \widetilde{\mathrm{id}_X}^{-1}\left(\overline{U} \times \{1\}\right)$ car $\overline{U} \times \{1\}$ est ouvermé dans Y. Pour cela, on remarque que $p \circ i_{|U \times \{1\}}$ est injective donc on a nécessairement $\widetilde{\mathrm{id}_X}(x) = (x, 1)$ pour tout $x \in U$. Ainsi, $U \subset \widetilde{\mathrm{id}_X}^{-1}(U \times \{1\})$ et donc par continuité de $\widetilde{\mathrm{id}_X}$, on a $\boxed{\overline{U} \subset \widetilde{\mathrm{id}_X}^{-1}\left(\overline{U} \times \{1\}\right)}$. De même, $p \circ i_{|\overline{U}^c \times \{0\}}$ est injective donc on a nécessairement $\widetilde{\mathrm{id}_X}(x) = (x, 0)$ pour tout $x \in \overline{U}^c$. Ainsi, on a $\overline{U}^c \subset \widetilde{\mathrm{id}_X}^{-1}\left(\overline{U}^c \times \{0\}\right)$ donc $\boxed{\overline{U} \supset \widetilde{\mathrm{id}_X}^{-1}\left(\overline{U} \times \{1\}\right)}$ ce qui nous permet de conclure. ✿

Remarque. On n'a pas vraiment utilisé la compacité, si ce n'est en disant qu'un produit d'un compact par $\{0, 1\}$ est compact et qu'une partie fermée d'un compact est compacte. En fait, cette preuve se généralise à énormément de sous-catégories de **Top** comme le fait originellement Gleason dans son article.

Pour la réciproque, on va étudier le comportement des applications surjectives dont la surjectivité est minimale en le sens suivant : toute restriction de l'application à une partie fermée du domaine n'est plus surjective. Par exemple, on peut énoncer le résultat suivant :

Lemme 3. *Soit K_1 et K_2, deux espaces compacts. Soit $\pi : K_1 \to K_2$ une application continue surjective. Il existe une partie compacte $k \subset K_1$ telle que $\pi(k) = K_2$ et pour toute partie $F \subsetneq k$ fermée dans k, on ait $\pi(F) \neq K_2$.*

Démonstration. Cf. annexe V. Comme tout bon résultat de minimalité/maximalité, la preuve utilise le lemme de Zorn. ✿

Lemme 4. *Soit $\pi : X \to Y$ une application continue surjective telle que pour toute partie fermée $F \subsetneq X$, $\pi(F) \neq Y$. Alors, pour toute partie ouverte U de X, on a*

$$\pi(U) \subset \overline{\pi(U^c)^c}.$$

Démonstration. Si U est vide, alors $\pi(U) = \emptyset$ et $\overline{\pi(U^c)^c} = \overline{Y^c} = \emptyset$. Si U est non vide, on considère $y \in \pi(U)$, un ouvert $V \ni y$ et on montre que $V \cap \pi(U^c)^c \neq \emptyset$ pour montrer qu'alors $y \in \overline{\pi(U^c)^c}$. Par continuité de π, la partie $U \cap \pi^{-1}(V)$ est ouverte dans X. De plus, elle est non vide car contient l'antécédent de y. Ainsi, $\left(U \cap \pi^{-1}(V)\right)^c$ est un fermé strictement inclus dans X et donc par hypothèse,

$$\pi\left(\left(U \cap \pi^{-1}(V)\right)^c\right) \neq Y.$$

Ainsi, on peut considérer $\tilde{y} \in \pi\left(\left(U \cap \pi^{-1}(V)\right)^c\right)^c \subset \pi(U^c)^c$ et $x \in X$ tels que $\tilde{y} = \pi(x)$. Nécessairement, $x \in U \cap \pi^{-1}(V)$, donc $\tilde{y} \in V \cap \pi(U^c)^c \neq \emptyset$ ce qui nous permet de conclure. ✿

Lemme 5. *Soit X et Y des espaces compacts avec Y extrêmement discontinu et soit $\pi : X \to Y$ une application continue surjective telle que $\pi(F) \neq Y$ pour toute partie fermée $F \subsetneq X$. Alors, π est un homéomorphisme.*

Démonstration. Comme X et Y sont compacts, il suffit de montrer que π est injective pour conclure. Soit $x, y \in X$ deux points distincts. Comme X est séparé, il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$. Comme π est fermée, $\pi(U^c)^c$ et $\pi(V^c)^c$ sont ouverts. De plus, ils sont disjoints par surjectivité de π :

$$\pi(U^c)^c \cap \pi(V^c)^c = \left(\pi(U^c) \cup \pi(V^c)\right)^c = \pi(U^c \cup V^c)^c = \pi((U \cap V)^c)^c = \pi(X)^c = Y^c = \emptyset.$$

Or, Y est extrêmement discontinu, donc d'après le lemme 2, $\overline{\pi(U^c)^c}$ et $\overline{\pi(V^c)^c}$ sont des ouverts disjoints. Or, d'après le lemme 4, $\pi(W) \subset \overline{\pi(W^c)^c}$ pour $W \in \{U, V\}$. On a donc nécessairement $\pi(x) \neq \pi(y)$. ✿

Proposition 2.2.2. *Un compact extrêmement discontinu est un compact projectif.*

Démonstration. Soit X un espace compact extrêmement discontinu. On se donne le diagramme de compacts suivant :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

On pose $K := \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$ pour compléter le carré commutatif cartésien avec les projections canoniques du produit :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "p_{E|K}"] \arrow[d, "p_{X|K}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

Comme Q est séparé, la partie K est fermée dans $X \times E$ (*cf.* annexe VI, corollaire VI.2). Ainsi, comme $X \times E$ est compact, K l'est aussi.

La surjectivité de π induit celle de $p_{X|K}$. Ainsi, en vertu du lemme 3, il existe un compact $k \subset K$ tel que la surjectivité de $p_{X|k} : k \to X$ soit minimale. Or, d'après le lemme 5, comme X est extrêmement discontinu, $p_{X|k}$ est un homéomorphisme et on a toujours le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "p_{E|k}"] \arrow[d, "p_{X|k}"', "\wr"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

On peut alors relever f en posant $\tilde{f} = p_{E|k} \circ p_{X|k}^{-1}$. ✿

2.3 Compactification de Stone-Čech et caractérisation de Rainwater

Si l'on souhaite adopter un point de vue plus catégorique, on est tenté de caractériser les objets projectifs grâce aux rétractes d'objets libres de la même manière qu'en algèbre (un objet libre étant un objet défini à partir d'un foncteur adjoint à gauche d'un foncteur d'oubli). C'était en effet le cas pour les objets projectifs de **Top** puisque le foncteur de discrétisation D : **Ens** $\to$ **Top** est adjoint à gauche du foncteur d'oubli U : **Top** $\to$ **Ens**. Ainsi, pour trouver les compacts projectifs, on considère le foncteur d'oubli V : **Comp** $\to$ **Top** (où **Comp** est la catégorie des espaces compacts). Puis l'on trouve un foncteur β : **Top** $\to$ **Comp** adjoint à gauche de V. Le foncteur $\beta \circ D$ sera alors adjoint à gauche de $U \circ V$: **Comp** $\to$ **Ens**.

Le foncteur β est connu, c'est la compactification de Stone-Čech dont le détail de la construction est donné en annexe VII.

Définition 2.3.1. Soit X un espace topologique. La compactification de Stone-Čech de X est un espace compact βX muni d'une application continue $e_X : X \to \beta X$ telle que $\overline{e_X(X)} = \beta X$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout espace compact K et toute application continue $f : X \to K$, il existe une unique application continue $\beta f : \beta X \to K$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dotted, "\beta f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Remarque. La propriété universelle permet de prouver (de la même manière que dans l'annexe II) l'unicité de la compactification de Stone-Čech à homéomorphisme près.

Théorème 3 (Rainwater)**.** *Un espace topologique est un compact projectif si et seulement s'il est un rétracte de la compactification de Stone-Čech d'un espace discret.*

Démonstration. Preuve du sens direct : Soit X un compact projectif. On considère le discrétisé DX de X et on applique la propriété universelle de la compactification de Stone-Čech pour obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} DX \arrow[r, "e_{DX}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \beta DX \arrow[d, "\beta\,\mathrm{id}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

La surjectivité de $\beta\,\mathrm{id}$ étant induite par celle de id, on peut relever l'application id_X en une application continue $\widetilde{\mathrm{id}_X} : X \to \beta DX$ telle que $(\beta\,\mathrm{id}) \circ \widetilde{\mathrm{id}_X} = \mathrm{id}_X$ car X est projectif. Cela fait alors de X un rétracte de βDX.

Preuve de la réciproque : En vertu de la proposition 2.1.1, il suffit de montrer que la compactification de Stone-Čech d'un espace discret est un compact projectif. Soit D un espace topologique discret, considérons le diagramme suivant avec E et Q compacts :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "e_D"'] & E \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ \beta D \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

Comme D est discret, il est projectif dans **Top** donc il existe $u : D \to E$ complétant le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e_D"'] & E \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ \beta D \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

On applique alors la propriété universelle de la compactification de Stone-Čech à u pour obtenir le diagramme suivant dont le carré et le triangle supérieur sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e_D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ \beta D \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\beta u"'] & Q \end{tikzcd}$$

On a alors $\pi \circ (\beta u) \circ e_D = \pi \circ u = f \circ e_D$. Donc $\pi \circ (\beta u)$ et f coïncident sur $e_D(D)$ qui est dense dans βD. Comme Q est séparé, on peut conclure que $\pi \circ (\beta u) = f$ (*cf.* annexe VI proposition VI.3). ✿

3 Théorème de représentation de Stone

3.1 Algèbre de Boole, définitions et exemples

Les algèbres de Boole forment le cadre dans lequel se sont historiquement développés les espaces de Stone. Il s'agit avant tout d'une structure purement algébrique, introduite et étudiée en tant que telle durant tout le XIXe siècle. Le théorème de représentation de Stone (1936) apporte un nouveau regard sur cette structure : il permet de voir ces algèbres comme des objets de nature topologique.

Définition 3.1.1 (Version anneau)**.** Une *algèbre de Boole* (ou anneau de Boole) est un anneau unitaire dont chaque élément est idempotent pour la multiplication, ce qui signifie que chaque élément est égal à son carré.

Remarque. Un tel anneau est forcément commutatif puisque l'on a $x+y = (x+y)^2 = x^2+y^2+xy+yx = x+y+xy+yx$ donc $xy + yx = 0$ et $xy = yx$ car $-x = (-x)^2 = x^2 = x$ (ce qui montre aussi qu'il est de caractéristique 1 ou 2).

On introduit sur toute algèbre de Boole $\mathcal{A}$ la relation d'ordre $\leqslant$ définie ainsi : pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}$, $x \leqslant y$ si et seulement si $xy = x$. Toute paire d'éléments x, y de $\mathcal{A}$ admet pour $\leqslant$ une borne inférieure $x \cap y = xy$ et une borne supérieure $x \cup y = x + y + xy$.

Toute algèbre de Boole est ainsi naturellement munie d'une structure de treillis, et il s'agit en fait d'une définition équivalente de ces objets.

Définition 3.1.2 (Version treillis)**.** Une *algèbre de Boole* est un treillis avec plus grand et plus petit éléments, dont chacune des deux opérations de borne inférieure et de borne supérieure est distributive par rapport à l'autre, et dont tout élément x possède un complément (noté x^c).

Remarque. Les plus grand et plus petit éléments de la définition précédente sont respectivement le neutre pour la première et pour la seconde lois de $\mathcal{A}$ vu comme anneau, notés respectivement 0 et 1. Un complément d'un élément $x \in \mathcal{A}$ est un élément $x^c \in \mathcal{A}$ tel que $x \cup x^c = 1$ et $x \cap x^c = 0$. En fait cet élément est unique et il s'agit de $1 + x$. On peut montrer qu'on a alors $x + y = (x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) = ((x \cap y^c)^c \cap (x^c \cap y)^c)^c$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.

Par la suite, on utilisera à loisir et simultanément ces deux points de vue. Par exemple, on sera amené à utiliser des (iso)morphismes d'algèbres de Boole, qui sont évidemment les (iso)morphismes d'anneaux usuels associés au point de vue de la première définition. En particulier, on dispose des lemmes suivant qui mettent à profit les deux points de vue.

Lemme 6. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres de Boole. Une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme d'anneaux si et seulement si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, on a :*

$$\begin{aligned} (i)\ & f(x \cap y) = f(x) \cap f(y) \\ (ii)\ & f(x^c) = f(x)^c \\ (iii)\ & f(x \cup y) = f(x) \cup f(y) \\ (iv)\ & x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \end{aligned}$$

et pour cela, il suffit de vérifier les deux premières conditions.

Lemme 7. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. Une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$ si et seulement si $1 \in \mathcal{B}$ et pour tout $x, y \in \mathcal{B}$, on a $x \cap y \in \mathcal{B}$ et $x^c \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. *Cf.* annexe VIII. ✿

Exemples. Un premier exemple naturel d'algèbre de Boole est celui de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble donné E. Ici, la relation d'ordre est la relation d'inclusion, la borne supérieure de deux ensembles est leur union, leur borne inférieure est leur intersection, et les éléments neutres sont l'ensemble vide et l'ensemble tout entier. Dans ce cas, la structure de treillis se visualise aisément à l'aide d'un diagramme de Hasse prenant cette forme lorsque $E = \{x, y, z\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{x,y,z\} & \\
\{x,y\} \arrow[ur] & \{x,z\} \arrow[u] & \{y,z\} \arrow[ul] \\
\{x\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{y\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{z\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Un autre exemple serait celui de l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pertinent autant pour sa simplicité que pour son interprétation en logique (les valeurs de vérité Vrai/Faux). Cependant, une lectrice attentive ferait remarquer qu'il ne s'agit là que d'un cas particulier du premier exemple : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe à l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble à un seul élément. Noter que c'est la seule algèbre de Boole qui soit un corps ou même qui soit intègre. En effet, si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, on a pour tout $x \in \mathcal{A}$, $x(x-1) = 0$, donc si $\mathcal{A}$ est intègre, $x \in \{0, 1\}$. Cela montre de plus que le groupes des inversibles $\mathcal{A}^\times$ d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est réduit à $\{1\}$ puisque si $x \notin \{0, 1\}$, alors $1 - x = x^c \notin \{1, 0\}$.

Enfin, si on se donne un espace topologique X. L'ensemble $OF(X)$ des ouvermés de X est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(X)$ puisque les ouvermés sont stables par intersections finies et passage au complémentaire (*cf.* lemme 7). On peut montrer qu'en général, ces algèbres de Boole ne sont pas isomorphes à l'algèbre des parties d'un ensemble (prendre par exemple $OF(\mathbb{Q})$).

3.2 L'espace de Stone associé à une algèbre de Boole

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ désignera une algèbre de Boole.

Définition 3.2.1. On appelle espace de Stone de $\mathcal{A}$, et on notera $S(\mathcal{A})$, l'ensemble des morphismes d'algèbres de Boole de $\mathcal{A}$ vers $\{0,1\}$. On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète, $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ de la topologie produit et finalement $S(\mathcal{A})$ de la topologie induite par celle de $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$.

Proposition 3.2.1. *L'espace de Stone d'une algèbre de Boole $S(\mathcal{A})$ est un espace de Stone.*

Démonstration. On utilise la proposition 1.1.1 : $\{0,1\}$ est totalement discontinu, donc $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ est totalement discontinu, et donc $S(\mathcal{A})$ aussi.

On sait (Tykhonov) que $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ est compact. Il suffit donc de montrer que $S(\mathcal{A})$ est fermé dans $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ pour conclure. Montrons pour cela que $S(\mathcal{A})^c$ est ouvert, *i.e.* voisinage de tous ses points. Soit $h \in S(\mathcal{A})^c$. L'application h n'est donc pas un morphisme d'anneaux et l'une au moins des deux premières conditions du lemme 6 est mise en défaut. S'il existe $x, y \in \mathcal{A}$ tels que $h(x \cap y) \neq h(x) \cap h(y)$, alors l'ensemble des applications coïncidant avec h sur $\{x \cap y, x, y\}$ est un voisinage ouvert (il s'agit d'un cylindre, voir définition suivante) de h dans $S(\mathcal{A})^c$. Pareillement, s'il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $h(x^c) \neq h(x)^c$, alors l'ensemble des applications coïncidant avec h sur $\{x, x^c\}$ est un voisinage ouvert de h dans $S(\mathcal{A})^c$. ✿

Définition 3.2.2. On appellera cylindre de $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ l'ensemble des applications $h \in \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ qui prennent des valeurs données en un nombre fini de points de $\mathcal{A}$ donnés. Ainsi, le cylindre associé à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^n$, $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$, est $\Omega := \{h \in \{0,1\}^{\mathcal{A}} \,|\, \forall i \in [\![1,n]\!],\, h(x_i) = \epsilon_i\}$.

Par définition de la topologie produit, les cylindres forment une base d'ouverts de $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ et donc leurs traces (les intersections de la forme $\Omega \cap S(\mathcal{A})$) en forment une de $S(\mathcal{A})$.

Par ailleurs, il se trouve que les ouvermés de $S(\mathcal{A})$ sont exactement les traces des cylindres que l'on vient d'introduire.

Proposition 3.2.2. *Soit $\Omega \subset S(\mathcal{A})$ la trace d'un cylindre. Il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $\Omega = \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(x) = 1\}$ qui est fermé dans $S(\mathcal{A})$ (son complémentaire est $\{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(x) = 0\}$).*

Démonstration. Soit $\Omega = \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, \forall i \in [\![1,n]\!],\, h(x_i) = \epsilon_i\}$ comme dans la définition. Pour tout x_i, on pose $y_i = x_i$ si $h(x_i) = 1$ et $y_i = x_i^c$ sinon (avec $h \in \Omega$) de telle sorte que $\Omega = \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, \forall i \in [\![1,n]\!],\, h(y_i) = 1\}$. En utilisant le fait que l'image d'une intersection finie par un morphisme est égale à l'intersection des images par ce morphisme (lemme 6, condition (i)), on a pour tout $h \in S(\mathcal{A})$, $h \in \Omega$ si et seulement si $h(\bigcap y_i) = 1$. Ainsi, $\Omega = \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(\bigcap y_i) = 1\}$. ✿

Proposition 3.2.3. *L'ensemble des ouvermés de $S(\mathcal{A})$ est exactement l'ensemble des traces des cylindres.*

Démonstration. On a dejà montré que les cylindres de $S(\mathcal{A})$ sont des ouvermés, montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $G = \bigcup \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(x_i) = 1\}$ un ouvermé de $S(\mathcal{A})$. Comme G est fermé, il est compact et on peut supposer l'union finie. Montrons que $G = \Omega := \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(\bigcup x_i) = 1\}$. D'abord, tout élément de G est un morphisme qui prend la valeur 1 en au moins un des x_i, et par croissance (lemme 6, (iv)) un tel morphisme prend donc aussi la valeur 1 en $\bigcup x_i$. Donc $G \subset \Omega$. D'autre part, un morphisme qui n'est pas dans G vaut 0 en chacun des x_i, et vaut donc nécessairement 0 en $\bigcup x_i$ (lemme 6, (iii)), donc n'appartient pas à Ω. Donc $\Omega \subset G$. ✿

Remarque. En fait, les démonstrations de ces propositions sont duales l'une de l'autre et proviennent toutes deux du fait que l'application qui à un élément $x \in \mathcal{A}$ associe $\{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(x) = 1\}$ est un morphisme d'algèbres de Boole (*cf.* théorème 4).

3.3 Fonctorialité et équivalence

L'espace de Stone $S(\mathcal{A})$ associé à l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ permet en fait de définir un foncteur entre la catégorie **Boole** des algèbres de Boole et la catégorie **Stone** des espaces de Stone.

Proposition 3.3.1. *Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres de Boole. On note $Sf : S(\mathcal{B}) \to S(\mathcal{A})$ l'application qui à un morphisme $h : \mathcal{B} \to \{0,1\}$ associe $h \circ f$. L'application Sf est continue et induit un foncteur contravariant S :* **Boole** $\to$ **Stone**.

Démonstration. Comme les ouvermés de $S(\mathcal{A})$ forment une base de $S(\mathcal{A})$, il suffit de montrer que pour tout ouvermé G de $S(\mathcal{A})$, $(Sf)^{-1}(G)$ est ouvert dans $S(\mathcal{B})$. Or, d'après les propositions précédentes, il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $G = \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(x) = 1\}$ et on a alors $(Sf)^{-1}(G) = \{h \in S(\mathcal{B}) \,|\, h(f(x)) = 1\}$ qui est ouver(mé) dans $S(\mathcal{B})$.

Pour la fonctorialité, on a évidemment $h \circ \mathrm{id}_{\mathcal{A}} = h$ pour tout $h \in \mathcal{A}$ donc $S\,\mathrm{id}_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{S(\mathcal{A})}$ et si on se donne des morphismes d'algèbres de Boole $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, on a pour tout $h \in S(\mathcal{C})$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, donc $Sf \circ Sg = S(g \circ f)$. ✿

De même pour l'algèbre de Boole $OF(X)$ des ouvermés d'un espace topologique X introduite dans les exemples de la partie 3.1, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.2. *Soit $f : X \to Y$ une application continue. On note $OF(f) : OF(Y) \to OF(X)$ l'application qui à un ouvermé G de Y associe $f^{-1}(G)$. L'application $OF(f)$ est un morphisme d'algèbres de Boole et induit un foncteur contravariant OF :* **Stone** $\to$ **Boole**.

Démonstration. La continuité de f montre que $OF(f)$ est bien définie. Le fait que ce soit un morphisme d'algèbres de Boole provient des régularités connues de l'image réciproque : pour tout ouvermés G et G' de Y, on a $f^{-1}(G \cap G') = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(G')$ et $f^{-1}(G^c) = f^{-1}(G)^c$. Pour la fonctorialité, on vérifie facilement que $\mathrm{id}_Z^{-1}(G) = G$ et $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$ pour toute application continue $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ et tout ouvermé G de Z. ✿

Remarque. On peut réutiliser les arguments de cette démonstration pour montrer que l'algèbre des parties d'un ensemble forme un foncteur $\mathcal{P}$: **Ens** $\to$ **Boole** et le foncteur OF est un sous-foncteur de $\mathcal{P} \circ U$ où U : **Stone** $\to$ **Ens** est le foncteur d'oubli.

Ces foncteurs forment alors une anti-équivalence de catégories entre **Boole** et **Stone**.

Théorème 4. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. On pose $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to OF(S(\mathcal{A}))$ l'application qui à un élément $a \in \mathcal{A}$ associe $\varphi_{\mathcal{A}}(a) = \{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(a) = 1\}$. Cette application est un isomorphisme naturel d'algèbres de Boole.*

Démonstration. Montrons d'abord que <u>$\varphi_{\mathcal{A}}$ est un morphisme d'algèbres de Boole</u>. Soit $h \in S(\mathcal{A})$ et $x, y \in \mathcal{A}$. On a $h(x) = 1$ si et seulement si $h(x^c) \neq 1$ et $h(x \cap y) = 1$ si et seulement si $h(x) = h(y) = 1$, donc $\varphi_{\mathcal{A}}(x^c) = \varphi_{\mathcal{A}}(x)^c$ et $\varphi_{\mathcal{A}}(x \cap y) = \varphi_{\mathcal{A}}(x) \cap \varphi_{\mathcal{A}}(y)$.

On sait que <u>ce morphisme est surjectif</u> d'après les propositions 3.2.2 et 3.2.3. Montrons donc que <u>$\varphi_{\mathcal{A}}$ est injectif</u>. Soit $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, montrons que $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset$. Si $x = 1$, alors $\varphi_{\mathcal{A}}(x) = S(\mathcal{A})$. Sinon, on considère $\langle x^c \rangle$ l'idéal engendré par $x^c \neq 0$. Comme $x \neq 0$, on a $x^c \notin \mathcal{A}^\times = \{1\}$ (*cf.* exemples de la partie 3.1). Donc $\langle x^c \rangle \neq \langle 1 \rangle$ et $\langle x^c \rangle$ est un idéal propre de $\mathcal{A}$. Ainsi, d'après le théorème de Krull, on peut considère un idéal maximal $\mathcal{M}$ contenant $\langle x^c \rangle$. Le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ est alors un corps de Boole (l'idempotence passe au quotient), nécessairement isomorphe à $\{0,1\}$ d'après ce qui a été dit dans les exemples de la partie 3.1. Ainsi, si on note $\pi : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ le morphisme de passage au quotient, on a $\pi(x) = 1$ et $\pi \in \varphi_{\mathcal{A}}(x)$. Ainsi, le noyau de $\varphi_{\mathcal{A}}$ est trivial et on a un isomorphisme

$$\boxed{\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} OF(S(\mathcal{A})).}$$

Reste à montrer que cet isomorphisme est naturel, c'est à dire que si l'on se donne un morphisme d'algèbres de Boole $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\ OF(S(\mathcal{A})) \arrow[r, "OF(Sf)"'] & OF(S(\mathcal{B})) \end{tikzcd}$$

Cela a en fait été déjà fait lorsque l'on a démontré que $Sf : S(\mathcal{B}) \to S(\mathcal{A})$ est continue. En effet, on a vu que pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $(Sf)^{-1}(\{h \in S(\mathcal{A}) \,|\, h(x) = 1\}) = \{h \in S(\mathcal{B}) \,|\, h(f(x)) = 1\}$. Donc avec nos notations, on a $(Sf)^{-1}(\varphi_{\mathcal{A}}(x)) = \varphi_{\mathcal{B}}(f(x))$, ou encore $OF(Sf) \circ \varphi_{\mathcal{A}}(x) = \varphi_{\mathcal{B}} \circ f(x)$. ✿

Remarque. On a ainsi démontré que toute algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{P}(S(\mathcal{A}))$. On appelle cette dernière « la complétion » de $\mathcal{A}$.

On peut montrer un résultat similaire dans **Stone** pour conclure alors à l'anti-équivalence.

Théorème 5. *Soit X un espace de Stone. Pour tout $x \in X$, on désigne par $\psi_X(x)$ l'application de $OF(X)$ vers $\{0,1\}$ valant 1 pour les ouvermés qui contiennent x et 0 pour les autres. $\psi_X(x)$ est un morphisme d'algèbres de Boole et $\psi_X : X \to S(OF(X))$ est un homéomorphisme naturel.*

Démonstration. $\psi_X(x)$ est un morphisme d'algèbres de Boole : Soit $G, G' \subset X$ deux ouvermés. On vérifie facilement que $\psi_X(x)(G \cap G') = (\psi_X(x)(G)) \cdot (\psi_X(x)(G'))$ et que $\psi_X(x)(G^c) = 1 - \psi_X(x)(G)$.

ψ_X est continue : $S(OF(X))$ est une partie de l'espace produit $\{0,1\}^{OF(X)}$ et on peut donc prouver la continuité de ψ_X en montrant la continuité de ses composantes. On note $p_G : \{0,1\}^{OF(X)} \to \{0,1\}$ la projection de la composante en l'ouvermé G. On a $(p_G \circ \psi_X)^{-1}(\{1\}) = \{x \in X \,|\, x \in G\} = G$ qui est ouvermé et donc $(p_G \circ \psi_X)^{-1}(\{0\}) = G^c$ est aussi ouvert. Ainsi, pour tout ouvermé G, $p_G \circ \psi_X$ est continue et donc ψ_X l'est aussi.

ψ_X est bijective : Pour l'injectivité, si x et y sont deux points distincts, comme X est totalement séparé, on peut trouver un ouvermé G qui contient x mais pas y. On a alors $\psi_X(x)(G) = 1$ et $\psi_X(y)(G) = 0$ et donc $\psi_X(x) \neq \psi_X(y)$. Pour la surjectivité, si $h : OF(X) \to \{0,1\}$ est un morphisme d'algèbres de Boole, on considère l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{G \in h^{-1}(\{1\})} G.$$

Les sous-intersections finies de l'intersection ci-dessus ne sont pas vides. En effet, comme h est un morphisme d'algèbres de Boole, si $G_1, \ldots, G_n \in h^{-1}(\{1\})$, on a $\bigcap G_i \in OF(X)$ et $h\left(\bigcap G_i\right) = \prod h(G_i) = 1$. Or, $h(\emptyset) = 0$ et donc $\bigcap G_i \neq \emptyset$. Ainsi, par compacité de X, l'intersection totale est non vide et si on considère un élément x de cette intersection, on a $h = \psi_X(x)$. En effet, d'une part si $h(G) = 1$, alors $x \in G$ et $\psi_X(x)(G) = 1$. D'autre part, si $h(G) = 0$, alors $h(G^c) = 1$, donc $x \in G^c$ d'après ce qui précède et $\psi_X(x)(G) = 0$.

Ainsi, ψ_X est une bijection continue entre deux compact, donc nécessairement fermée et on a un homéomorphisme

$$\boxed{\psi_X : X \xrightarrow{\sim} OF(S(X)).}$$

ψ est une transformation naturelle : On veut montrer que la diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_X"'] & Y \arrow[d, "\psi_Y"] \\ S(OF(X)) \arrow[r, "S(OF(f))"'] & S(OF(Y)) \end{tikzcd}$$

Soit G un ouvermé de Y. On a $S(OF(f))(\psi_X(x))(G) = \psi_X(x) \circ OF(f)(G) = \psi_X(x)(f^{-1}(G)) = 1$ si et seulement si $x \in f^{-1}(G)$ si et seulement si $f(x) \in G$ si et seulement si $\psi_Y(f(x))(G) = 1$. On a donc bien $\psi_Y \circ f = S(OF(f)) \circ \psi_X$. ✿

Annexes

I Espace T_4 et lemme d'Urysohn

Définition I.1. Un espace topologique X est T_4 si pour tout couple de fermés disjoints F_0 et F_1, il existe des ouverts $U \supset F_0$ et $V \supset F_1$ qui sont disjoints. En particulier $\overline{U} \subset {F_1}^c$.

Proposition I.1. *Tout espace compact est T_4.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'on peut séparer les points des fermés par des ouverts. Soit $x \in X$ et F un fermé de X ne contenant pas x. Soit $y \in F$. Comme X est compact, il est séparé et on peut considérer des ouverts $U_y \ni x$ et $V_y \ni y$ d'intersection vide. On a alors $F \subset \bigcup_{y \in F} V_y$. Or F est fermé dans X qui est compact donc F est compact et $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} =: V$. En posant alors $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, on a U ouvert, $x \in U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Maintenant, si on revient à F_1 et F_2, on considère pour tout $x \in F_1$ des ouverts $U_x \ni x$ et $V_x \supset F_2$ d'intersection vide. On a alors $F_1 \subset \bigcup_{x \in F_1} U_x$, or F_1 est compact car fermé dans X, donc $F_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} =: U$. Ainsi, on a $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ ouvert, $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. ✿

Proposition I.2 (Lemme d'Urysohn)**.** *Soit X un espace topologique T_4. Soit F_0 et F' des parties non vides, disjointes et fermées de X. Alors, il existe une application continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f_{|F_0} = 0$ et $f_{|F'} = 1$.*

Démonstration. Comme X est T_4, il existe un ouvert $U_{1/2}$ tel que

$$F_0 \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset F'^{\,c} =: U_1.$$

On pose alors $F_{1/2} := \overline{U_{1/2}}$. Par récurrence, si on a construit pour $i \leqslant j \in [0,1]$ un fermé F_i et un ouvert $U_j \supset F_i$, on sait qu'il existe (X est T_4) un ouvert $U_{(i+j)/2}$ tel que

$$F_i \subset U_{(i+j)/2} \subset \overline{U_{(i+j)/2}} =: F_{(i+j)/2} \subset U_j.$$

Ainsi, on a défini des ouverts et des fermés U_i et F_i pour tout $i \in D \cap]0,1[$ (en plus de F_0 et U_1) où D est l'ensemble des nombres dyadiques qui est dense dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $i \leqslant j$ dans $D \cap]0,1[$:

$$F_0 \subset U_i \subset F_i \subset U_j \subset F_j \subset U_1.$$

On pose pour tout $x \in X$, $f(x) := \inf\{i \in D \cap]0,1] \,|\, x \in U_i\} \cup \{1\}$. On peut alors montrer deux choses pour tout $x \in X$ et $d \in D \cap]0,1[$:

(i) Si $x \in F_d$, alors $f(x) \leqslant d$.

(ii) Si $x \notin U_d$, alors $f(x) \geqslant d$.

Pour (i), si $x \in F_d$, alors $x \in U_i$ pour tout $i > d$ dans D. Or, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $i \in D$ tel que $d < i < d + \varepsilon$. On a alors $f(x) \leqslant i < d + \varepsilon$ car $x \in U_i$. Donc, en faisant tendre ε vers 0, on sait que $f(x) \leqslant d$.

Pour (ii), si $x \notin U_d$, alors $x \notin U_i$ pour tout $i \leqslant d$ dans D. Ainsi, si $x \in U_i$, alors $i > d$, donc $f(x) \geqslant d$ par définition de f.

Montrons que f est continue et prend les valeurs souhaitées en F_0 et en F'.

$\underline{f \text{ est continue sur } f^{-1}(\{0\}) \text{ et constante égale à } 0 \text{ sur } F_0}$: Soit $x \in F_0$. Pour tout $i \in D \cap]0,1]$, on a $F_0 \subset U_i$ et en particulier $x \in U_i$, donc $f(x) = 0$. Soit $x \in f^{-1}(\{0\})$, $\varepsilon > 0$ et $d \in D$ tel que

$$f(x) = 0 < d < \varepsilon \leqslant 1.$$

Si $y \in U_d \subset F_d$, alors $f(y) \leqslant d$ (d'après (i)), donc $f(U_d) \subset [0,d] \subset [0,\varepsilon]$. Donc, f est continue en x.

$\underline{f \text{ est continue sur } f^{-1}(\{1\}) \text{ et constante égale à } 1 \text{ sur } F'}$: Soit $x \in F' = U_1^{\,c}$. Pour tout $i \in D \cap]0,1]$, on a $U_1^{\,c} \subset U_i^{\,c}$ et en particulier $x \notin U_i$, donc $f(x) = 1$. Soit $x \in f^{-1}(\{1\})$, $\varepsilon > 0$ et $d \in D$ tel que

$$0 < f(x) - \varepsilon < d < 1 = f(x).$$

Si $y \notin F_d \supset U_d$, alors $f(y) \geqslant d$ (d'après (ii)), donc $f({F_d}^c) \subset [d,1] \subset [\varepsilon,1]$. Donc, f est continue en x.

$\underline{f \text{ est continue sur } f^{-1}(]0,1[)}$: Soit $x \in X$, $\varepsilon > 0$ et $d_1, d_2 \in D$ tels que

$$0 < f(x) - \varepsilon < d_1 < f(x) < d_2 < f(x) + \varepsilon < 1.$$

Comme $d_1 < f(x) < d_2$, on sait que $x \notin F_{d_1}$ par (i) et que $x \in U_{d_2}$ par (ii). Et de même que précédemment, $f(U_{d_2} \setminus F_{d_1}) \subset [d_1, d_2] \subset [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$, donc f est continue en x. ✿

II Unicité des limites inverses

Proposition II.1. *Soit $(X_i, f_{i,j})_I$ un système projectif. Les limites inverses de $(X_i, f_{i,j})_I$ sont homéomorphes par un unique isomorphisme de cônes possible.*

Démonstration. Soit L et L' deux limites inverses. Par propriété universelle des limites inverses, il existe un unique morphisme de cônes $u : L \to L'$ et un unique autre $v : L' \to L$. Or, par propriété universelle, le seul endomorphisme de L (resp. L') est id_L (resp. $\mathrm{id}_{L'}$). Ainsi, u et v sont des isomorphismes de cônes réciproques entre L et L'. ✿

En fait, on peut refaire cette démonstration pour montrer plus généralement qu'un objet final (ou initial) d'une catégorie est unique à isomorphisme près.

III Relation d'ordre filtrant à droite sur $\mathcal{R}_X$

Proposition III.1. *Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}_X$ l'ensemble des relations ouvertes sur X. On peut ordonner $\mathcal{R}_X$ avec la relation $\leqslant$ définie comme suit :*

$$\rho \geqslant \rho' \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \pi_\rho(x) \subset \pi_{\rho'}(x).$$

L'ensemble ordonné $(\mathcal{R}_X, \leqslant)$ est alors filtrant à droite.

Démonstration. Tout vient du fait que l'ensemble des parties de X est un ensemble ordonné filtrant à gauche par l'inclusion. Explicitons le caractère filtrant à droite de $\mathcal{R}_X$. Soit $\rho, \rho' \in \mathcal{R}_X$. On pose $\rho \cap \rho'$, la relation d'équivalence sur X telle que pour tout $x \in X$, on ait

$$\pi_{\rho \cap \rho'}(x) = \pi_\rho(x) \cap \pi_{\rho'}(x).$$

Plus explicitement, on a pour tout $x, y \in X$, $x(\rho \cap \rho')y$ si et seulement si $x\rho y$ et $x\rho' y$. Cette relation est ouverte car ses classes d'équivalence associées sont des intersections finies d'ouverts. Enfin, on a évidemment $\rho \cap \rho' \geqslant \rho, \rho'$. ✿

IV Topologie des rétractes

Proposition IV.1. *Soit Y et X des espaces topologiques. Considérons des applications continues $i : Y \to X$ et $\pi : X \to Y$ telles que $\pi \circ i = \mathrm{id}_Y$ faisant de Y un rétracte de X. Une partie $U \subset Y$ est ouverte dans Y si et seulement si $i(U)$ est ouverte dans X, si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouverte dans X.*

Démonstration. Soit $U \subset Y$. Si U est ouverte, alors $\pi^{-1}(U)$ est ouverte par continuité de π. De plus, comme $\pi \circ i = \mathrm{id}_Y$ et que i est injective, on sait que $\pi_{|i(Y)}$ est la réciproque de la corestriction de i à son image. Donc par continuité de π, on sait que i est une application ouverte et que $i(U)$ est ouverte dans X.

Réciproquement, si $i(U)$ est ouverte dans X, alors $U = i^{-1}(i(U))$ est ouverte dans Y par continuité de i. Si $\pi^{-1}(U)$ est ouverte dans X, alors par continuité de i, on sait que $i^{-1}(\pi^{-1}(U)) = \mathrm{id}_Y^{-1}(U) = U$ est ouverte dans Y. ✿

V Existence de domaines compacts recouvrants minimaux

Définition V.1. Soit $(\mathcal{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

Une *chaîne* de $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{E}$ totalement ordonnée lorsqu'elle est ordonnée par $\leqslant$.

Un *majorant* d'une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un élément $x \in \mathcal{E}$ tel que $y \leqslant x$ pour tout $y \in \mathcal{F}$.

Un *élément maximal* de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$ tel qu'il n'existe aucun autre élément de $\mathcal{E}$ qui lui soit supérieur.

On dit que $\mathcal{E}$ est *inductif* si toute ses chaînes admettent un majorant.

Proposition V.1 (Lemme de Zorn)**.** *Tout ensemble inductif admet un élément maximal.*

Démonstration. Admis. ✿

Proposition V.2. *Soit K_1 et K_2 deux espaces compacts. Soit $\pi : K_1 \to K_2$ une application continue surjective. Il existe une partie compacte $k \subset K_1$ telle que $\pi(k) = K_2$ et pour toute partie $F \subsetneq k$ fermée dans k, on ait $\pi(F) \neq K_2$.*

Démonstration. On pose $\mathcal{E} = \{F \subset K_1 \mid F \text{ fermée, } \pi(F) = K_2\}$ que l'on ordonne par $\supset$ (l'ordre inverse de $\subset$). Il s'agit de montrer que $(\mathcal{E}, \supset)$ est inductif pour en déduire l'existence d'une partie compacte k vérifiant ce que l'on souhaite par le lemme de Zorn.

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de $\mathcal{E}$. Il faut montrer que $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{C}} F$ est un élément de $\mathcal{E}$ pour conclure qu'il est un majorant de $\mathcal{C}$ puisque $F \supset \bigcap\limits_{F \in \mathcal{C}} F$ pour tout $F \in \mathcal{C}$. Évidemment, $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{C}} F$ est une partie fermée de K_1 car intersection de fermés de K_1.

Si K_2 est vide, l'énoncé est trivial donc supposons $K_2 \neq \emptyset$. Dès lors, tous les éléments de $\mathcal{C}$ sont non vides car leurs cardinaux sont supérieurs à celui de K_2. Remarquons que si on considère une partie finie $\{F_1 \subset \cdots \subset F_n\}$ de $\mathcal{C}$, on a pour tout $y \in K_2$,

$$\pi^{-1}(\{y\}) \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \pi^{-1}(\{y\}) \cap F_1 \neq \emptyset$$

et $\pi^{-1}(\{y\})$ est un fermé non vide de K_1 par surjectivité et continuité de π et car $\{y\}$ est fermé dans K_2. Ainsi, par compacité de K_1, on sait que $\pi^{-1}(\{y\}) \cap \bigcap\limits_{F \in \mathcal{C}} F$ est non vide pour tout $y \in K_2$. Donc, $\pi\left(\bigcap\limits_{F \in \mathcal{C}} F\right) = K_2$ et $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{C}} F \in \mathcal{E}$. ✿

Remarque. Dans cette preuve, nous n'avons pas vraiment utilisé le fait que K_2 est compact mais uniquement le fait que les singletons y sont fermés. Ainsi, ce résultat se généralise dans le cas où K_2 est un espace de Fréchet.

VI Épimorphismes non surjectifs dans la catégorie des espaces séparés

Proposition VI.1. *Soit X un espace topologique. L'espace X est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta_X := \{(x,y) \in X \times X \mid y = x\}$ est fermée dans $X \times X$.*

Démonstration. Supposons que X est séparé. Montrons que $(\Delta_X)^c$ est ouvert en montrant qu'il est voisinage de tous ses points. Soit $(x,y) \in (\Delta_X)^c$ *i.e* $x \neq y$. Comme X est séparé, il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$. On a alors $(\Delta_X)^c \supset U \times V \ni (x,y)$ ouvert dans $X \times X$.

Réciproquement, supposons Δ_X fermé dans $X \times X$ et considérons $x, y \in X$ deux points distincts. Dès lors, $(x,y) \in (\Delta_X)^c$ qui est ouvert. Par définition de la topologie produit, on a $(\Delta_X)^c = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ avec U_i et V_i des ouverts de X pour tout $i \in I$. Il existe alors $i \in I$ tel que $(x,y) \in U_i \times V_i \subset (\Delta_X)^c$. Donc $x \in U_i$, $y \in V_i$ et $U_i \cap V_i = \emptyset$. ✿

Corollaire VI.2. *Soit X, Y, Z des espaces topologiques et considérons des applications continues $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$. Si Z est séparé alors le produit fibré $X \times_Z Y := \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ est fermé dans l'espace produit $X \times Y$.*

Démonstration. Par propriété universelle du produit, les applications continues f et g induisent une application continue $f \times g : X \times Y \to Z \times Z$ avec $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$. On a alors $X \times_Z Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$. Or, si Z est séparé, Δ_Z est fermé dans $Z \times Z$ en vertu de la proposition précédente donc $X \times_Z Y$ est fermé dans $X \times Y$. ✿

Dans le cas $Y = X$, l'homéomorphisme canonique $\delta_X : X \to \Delta_X$ (qui à x associe (x,x)) permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition VI.3. *Soit X un espace topologique, Z un espace séparé et $f, g : X \to Z$, deux application continues. S'il existe une partie dense de X sur laquelle f et g coïncident, alors $f = g$.*

Démonstration. En vertu du corollaire précédent, $(X \times_Z X) \cap \Delta_X$ est fermé dans Δ_X. Donc $\delta_X^{-1}((X \times_Z X) \cap \Delta_X)$ est fermé dans X. Or, $\delta_X^{-1}((X \times_Z X) \cap \Delta_X) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ contient par hypothèse une partie D dense dans X. On a donc $X = \overline{D} \subset \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. ✿

Ceci permet de montrer que si $h : Y \to X$ est d'image dense dans X, alors on a

$$f \circ h = g \circ h \Rightarrow f = g.$$

Donc, dans la catégorie des espaces séparés, les applications à image dense dans l'espace d'arrivé sont des épimorphismes (la réciproque est en fait aussi vraie).

VII Construction de la « compactification » de Stone-Čech

Soit X un espace topologique. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues de X vers $[0,1]$. Soit $x \in X$, on note $ev(x)$ la suite $(f(x))_{f \in \mathcal{C}} \in [0,1]^{\mathcal{C}}$. Si on munit $[0,1]^{\mathcal{C}}$ de la topologie produit, l'application $ev : X \to [0,1]^{\mathcal{C}}$ est évidemment continue puisque pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a $p_f \circ ev = f$ qui est continue.

Définition VII.1. On définit par $\beta X := \overline{ev(X)} \subset [0,1]^{\mathcal{C}}$ le *compactifié de Stone-Čech de X* et par $e_X := ev^{|\beta X} : X \to \beta X$ sa *compactification de Stone-Čech.*

L'espace βX est bien compact car fermé dans $[0,1]^{\mathcal{C}}$ qui l'est par le théorème de Tychonov. De plus, l'image de X par e_X est dense dans βX par construction. Par contre, l'application e_X ne forme pas forcément un homéomorphisme entre X et son image dans βX (il se peut qu'elle ne soit même pas injective), donc le terme de « compactification » est un peu abusif dans ce cadre général. Par contre, si X est compact, la situation est évidemment meilleure

Proposition VII.1. *Si X est compact, alors $e_X : X \to \beta X$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. On sait que e_X est continue. On voit facilement qu'elle est fermée puisque X est compact et βX est séparé. Comme l'image de X par e_X est dense dans βX, cela montre aussi que e_X est surjective. Reste donc à montrer que e_X est injective. Or, comme X est compact, il est T_4 (*Cf.* Annexe I proposition I.1) et par le lemme d'Urysohn (*Cf.* Annexe I), pour tout $x, y \in X$ distincts, il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ (les singletons sont fermés car X est séparé). On a alors $p_f(e_X(x)) = f(x) \neq f(y) = p_f(e_X(y))$ donc $e_X(x) \neq e_X(y)$. ✿

On cherche maintenant à établir la propriété universelle de la compactification de Stone-Čech.

Proposition VII.2. *Soit X un espace topologique, K un espace compact et $f : X \to K$ une application continue. Il existe une unique application continue $\beta f : \beta X \to K$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dotted, "\beta f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Démonstration. Si $K = [0,1]$, alors $f \in \mathcal{C}$ et on a nécessairement $p_f(e_X(x)) = f(x) = \beta f(e_X(x))$, donc βf doit coïncider avec p_f sur l'image de X par e_X. Comme βf doit aussi être continue et l'image de X par e_X est dense dans βX, le seul choix possible pour βf (d'après la proposition VI.3) est p_f qui fait bien commuter le diagramme.

Si $K = [0,1]^I$ où I est un ensemble quelconque, alors pour tout $i \in I$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[dr, "\beta(p_i \circ f)"] & \\ & {[0,1]^I} \arrow[r, "p_i"'] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Donc, si on a $\beta f \circ e_X = f$, alors $p_i \circ \beta f \circ e_X = \beta(p_i \circ f) \circ e_X$. Donc, toujours grâce à la proposition VI.3, $p_i \circ \beta f = \beta(p_i \circ f)$, pour tout $i \in I$. Ainsi, par propriété universelle du produit, on doit nécessairement poser $\beta f := \prod_{i \in I} \beta(p_i \circ f)$ et on a bien $\beta f \circ e_X = f$ aussi par propriété universelle du produit.

Enfin, si K est un compact quelconque, d'après la proposition précédente, on sait que $e_K : K \to \beta K \subset [0,1]^I$ (où I est l'ensemble des application continues de K dans $[0,1]$) est un homéomorphisme. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[dr, "\beta(e_K \circ f)"] & \\ & K \arrow[r, "\sim", "e_K"'] & \beta K \end{tikzcd}$$

Ainsi, par le même argument qu'au paragraphe précédent, on a nécessairement $e_K \circ \beta f = \beta(e_k \circ f)$. On doit donc poser $\beta f := e_K^{-1} \circ \beta(e_K \circ f)$ et il est clair que ce choix fonctionne. ✿

On a alors construit un foncteur $\beta : \mathbf{Top} \to \mathbf{Comp}$ (où **Top** est la catégorie des espaces topologiques et **Comp** est la catégorie des espaces compacts). En effet, si on a une application continue $f : X \to Y$ quelconque, on définit $\beta f := \beta(e_Y \circ f)$ l'unique application continue de βX vers βY faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_X"'] & Y \arrow[d, "e_Y"] \\ \beta X \arrow[r, "\beta f"'] & \beta Y \end{tikzcd}$$

Or, pour tout espace topologique X, on a le diagramme commutatif évident suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "e_X"'] & X \arrow[d, "e_X"] \\ \beta X \arrow[r, "\mathrm{id}_{\beta X}"'] & \beta X \end{tikzcd}$$

Donc $\beta\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\beta X}$.

Maintenant, si on a des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Alors, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e_Y"] & Z \arrow[d, "e_Z"] \\ \beta X \arrow[r, "\beta f"'] & \beta Y \arrow[r, "\beta g"'] & \beta Z \end{tikzcd}$$

Donc $\beta(g \circ f) = \beta g \circ \beta f$.

Si on note le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Top}$, alors la propriété universelle de compactification de Stone-Čech donne une bijection $\beta_{X,K} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, UK) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Comp}}(\beta X, K)$.

Proposition VII.3. *La bijection $\beta_{X,K} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, UK) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Comp}}(\beta X, K)$ est naturelle. Plus explicitement, on a le diagramme commutatif suivant pour toute application continue $f : X' \to X$ et $g : K \to K'$.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, UK) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(f, Ug)"] \arrow[d, "\beta_{X,K}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X', UK') \arrow[d, "\beta_{X',K'}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Comp}}(\beta X, K) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\beta f, g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Comp}}(\beta X', K') \end{tikzcd}$$

Donc $\beta : \mathbf{Top} \to \mathbf{Comp}$ est un adjoint à gauche de $U : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Top}$.

Démonstration. Soit $h : X \to K$ une application continue. Montrons que $g \circ \beta_{X,K}(h) \circ \beta f = \beta_{X',K'}(g \circ h \circ f)$. On a par définition de β et de $\beta_{X,K}$ le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{X'}"'] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e_X"'] & K \arrow[r, "g"] & K' \\ \beta X' \arrow[r, "\beta f"'] & \beta X \arrow[ur, "\beta_{X,K}(h)"'] & & \end{tikzcd}$$

Donc en particulier, on a le sous-diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g \circ h \circ f"] \arrow[d, "e_{X'}"'] & K' \\ \beta X' \arrow[ur, "g \circ \beta_{X,K}(h) \circ \beta f"'] & \end{tikzcd}$$

D'où l'égalité recherchée. ✿

VIII Caractérisation des morphismes d'algèbres de Boole et des sous-algèbres de Boole

Proposition VIII.1. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres de Boole. Une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme d'anneaux si et seulement si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, on a :*

$$
\begin{aligned}
(i)\ & f(x \cap y) = f(x) \cap f(y) \\
(ii)\ & f(x^c) = f(x)^c \\
(iii)\ & f(x \cup y) = f(x) \cup f(y) \\
(iv)\ & x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)
\end{aligned}
$$

et pour cela, il suffit de vérifier les deux premières conditions.

Démonstration. On commence par montrer que si f est un morphisme d'anneaux, alors les conditions (i) à (ii) sont vérifiées. La première relation est contenue dans la définition d'un morphisme d'anneaux. La deuxième se réécrit : $f(1+x) = 1+f(x)$ et résulte donc du fait que, par définition, f est additive et $f(1) = 1$. Pour la troisième, on utilise les lois de de Morgan et les points (i) et (ii) : $f(x\cup y) = f((x^c \cap y^c)^c) = (f(x)^c \cap f(y)^c)^c = f(x) \cup f(y)$. Enfin, la dernière relation résulte de la multiplicité de f : si $xy = x$, alors on a bien $f(x)f(y) = f(x)$.

Pour ce qui est de la réciproque, on montre que les conditions (i) et (ii) seules sont déjà suffisantes. En effet, en supposant ces deux conditions vérifiées par f, on a pour tout $x, y \in \mathcal{A}$

$$f(xy) = f(x \cap y) = f(x) \cap f(y) = f(x)f(y)$$

et

$$f(x + y) = f\left(((x^c \cap y)^c \cap (x \cap y^c)^c)^c\right) = ((f(x)^c \cap f(y))^c \cap (f(x) \cap f(y)^c)^c)^c = f(x) + f(y).$$

On en déduit immédiatement $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ et donc $f(0) = 0$, puis

$$f(1) = f(0^c) = f(0)^c = 0^c = 1.$$

✿

Proposition VIII.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. Une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$ si et seulement si $1 \in \mathcal{B}$ et pour tout $x, y \in \mathcal{B}$, on a $x \cap y \in \mathcal{B}$ et $x^c \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$ contenant 1 et stable par multiplication, ou de manière équivalente, par intersection. Si $\mathcal{B}$ est aussi stable par addition et $x \in \mathcal{B}$, alors $x^c = 1 + x \in \mathcal{B}$. Réciproquement, si cette dernière propriété est satisfaite et si $x, y \in \mathcal{B}$, alors $x + y = ((x^c \cap y)^c \cap (x \cap y^c)^c)^c \in \mathcal{B}$. ✿

Bibliographie

[Joh82] Peter T. Johnstone. *Stone spaces*. T. 3. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge university press, 1982.

[RZ00] Luis Ribes et Pavel Zalesskii. *Profinite groups*. Springer, 2000.

[Gle58] Andrew M. Gleason. “Projective topological spaces”. In : *Illinois Journal of Mathematics* 2.4A (1958), p. 482-489.

[Rai59] John Rainwater. “A note on projective resolutions”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* T. 10. 5. 1959, p. 734-735.

[Wik22] Wikipedia contributors. *Stone–Čech compactification — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online ; accessed 6-March-2023]. 2022. url : `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stone%5C%E2%5C%80%5C%93%5C%C4%5C%8Cech_compactification&oldid=1127052211`.

[CLK03] René Cori, Daniel Lascar et Jean-Louis Krivine. *Logique mathématique 1 Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats : cours et exercices corrigés*. Sciences sup. 2003.