Les opérades au service d'une notion universelle d'algèbre enveloppante

Jules Givelet

Stage de M2 encadré par Friedrich Wagemann, LMJL, Nantes

24 juin 2025

1. Qu'est ce qu'une algèbre ?

2. Qu'est ce qu'un module ?

- Algèbre associative : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A
  + une opération $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes 2}, A)$
  + $\mu \circ (\mu, \mathrm{id}) = \mu \circ (\mathrm{id}, \mu) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes 3}, A)$.

- Algèbre commutative : une algèbre associative A
  + $\mu \cdot (1\,2) = \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes 2}, A)$.

- Algèbre de Lie : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$
  + une opération $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}^{\otimes 2}, \mathfrak{g})$
  + $\alpha \cdot (1\,2) = -\alpha$
  + $(\alpha \circ (\alpha, \mathrm{id})) \cdot (\mathrm{id}_3 + (1\,2\,3) + (1\,3\,2)) = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}^{\otimes 3}, \mathfrak{g})$.

- Algèbre de Poisson (à gauche) : une algèbre commutative A
  + un crochet de Lie α
  + $\alpha \circ (\mathrm{id}, \mu) = \mu \circ (\alpha, \mathrm{id}) + (\mu \circ (\mathrm{id}, \alpha)) \cdot (1\,2)$

« Définition »

Une **algèbre** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'éléments des $\mathfrak{S}_n$-modules $\mathcal{E}nd_A(n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A)$ vérifiant un certain nombre de relations.

« Une relation » : combinaison $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$-linéaire de **compositions** d'opérations.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}nd_A(n) \otimes \mathcal{E}nd_A(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}nd_A(i_n) &\longrightarrow \mathcal{E}nd_A(i_1 + \cdots + i_n) \\ (\mu, \nu_1, \ldots, \nu_n) &\longmapsto \mu \circ (\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n) \end{aligned}$$

Définition

Une **opérade** $\mathcal{P}$ est une suite de $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$-modules $\mathcal{P}(n)$ munie de lois de composition

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n) \to \mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n)$$

sujettes à des axiomes d'associativité et de symétrie telles qu'il existe un élément $\mathrm{id} \in \mathcal{P}(1)$ neutre pour ces lois.

Définition

Une $\mathcal{P}$-**algèbre** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'un morphisme d'opérades

$$\varphi_A : \mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_A$$

Exemples :

- $\mathcal{C}om = (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}, \mathbb{K}, \dots)$
- $\mathcal{A}ss = (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2], \mathbb{K}[\mathfrak{S}_3], \dots)$
- $\mathcal{L}ie = (0, \mathbb{K}, \mathrm{sgn}_2, ???)$

Proposition

Le foncteur d'oubli

$$\text{Opérades} \to \mathrm{Mod}(\mathfrak{S}) := \prod_{n \geqslant 0} \mathrm{Mod}(\mathfrak{S}_n)$$

admet un adjoint à gauche $\mathcal{T}$.

Exemples :

- Une algèbre sur l'opérade $\mathcal{T}\left(\curlyvee \cdot (1\,2) = \curlyvee \right)$ est un espace vectoriel muni d'une opération symétrique.

On peut forcer des relations sur une opérade grâce à la notion d'**idéal d'une opérade** : si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{P}$, alors on a la propriété universelle attendue

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}/\mathcal{I}, \mathcal{Q}) \simeq \{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}), \varphi(\mathcal{I}) = 0\}$$

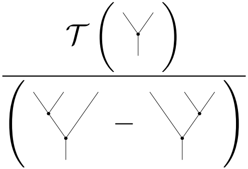
Définition

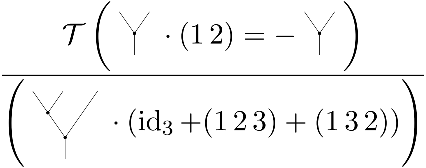
Une opérade **quadratique binaire** est une opérade admettant une présentation

$$\frac{\mathcal{T}(E_2)}{(R_3)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$$

où E_2 est un $\mathfrak{S}$-module concentré en arité 2 et $R_3 \subset \mathcal{T}(E_2)(3)$.

Exemples :

- $\mathcal{A}ss =$ 

- $\mathcal{L}ie :=$ 

- Module sur une algèbre commutative A : espace vectoriel M
  + un morphisme d'action $A \otimes M \to M$
  + un axiome d'associativité mixte $\in \mathrm{Hom}(A \otimes A \otimes M, M)$.

- Bimodule sur une algèbre associative A : espace vectoriel M
  + deux morphismes d'actions $A \otimes M \to M$ et $M \otimes A \to M$
  + trois axiomes d'associativité mixte :

$$[(a,b,x) \mapsto ab \cdot x - a \cdot (b \cdot x)] \in \mathrm{Hom}(A \otimes A \otimes M, M)$$
$$[(a,x,b) \mapsto (a \cdot x) \cdot b - a \cdot (x \cdot b)] \in \mathrm{Hom}(A \otimes M \otimes A, M)$$
$$[(x,a,b) \mapsto (x \cdot a) \cdot b - x \cdot ab] \in \mathrm{Hom}(M \otimes A \otimes A, M)$$

- Module sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: espace vectoriel M
  + un morphisme d'action $\mathfrak{g} \otimes M \to M$
  + $[g,h] \cdot x = g \cdot (h \cdot x) - h \cdot (g \cdot x)$.

« Définition »

Un **module** sur une algèbre A est un espace vectoriel muni d'actions $A^{\otimes(i-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-i)} \to M$ correspondant aux opérations de A et vérifiant les relations induites par les relations que vérifient les opérations de A.

Notons alors

$$\mathrm{End}^{A}_{M,\varepsilon}(n) := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}\left(A^{\otimes(i-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-i)}, M\right)$$

de telle sorte que $\mathrm{End}^{A}_{M,\varepsilon}$ soit un $\mathfrak{S}$-module.

Définition

Une structure de A-**module** sur M est la donnée d'un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon} \\ \mu \in \mathcal{P}(n) & \longmapsto & (\mu^i_M)_{1\leqslant i\leqslant n} \end{array}$$

tel que $\mathrm{id}^1_M = \mathrm{id}_M$ et

$$(\mu \circ (\nu_1, \ldots, \nu_n))^i_M = \mu^j_M \circ (\nu_{1A} \otimes \cdots \otimes \nu^k_{jM} \otimes \cdots \nu_{nA})$$

Cela se traduit par un morphisme d'opérades $\mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$ dont la première composante est le morphisme structurel de A.

Théorème (Goerss-Hopkins, 2000)

Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A, il existe une unique algèbre associative unitaire $U_{\mathcal{P}}(A)$ appelée **algèbre enveloppante** telle que l'on a un isomorphisme de catégories

$$H : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A))$$

tel que $H(M) = M$ comme espaces vectoriels.

Exemples :

- $U_{\mathcal{C}om}(A) = A_+$
- $U_{\mathcal{A}ss}(A) = A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}}$
- $U_{\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g}) = \dfrac{T(\mathfrak{g})}{([g,h] = g \otimes h - h \otimes g)}$

L'algèbre enveloppante $U_{\mathcal{P}}(A)$ est une construction fonctorielle...

- en A : $f : B \to A$ induit $U_{\mathcal{P}} f : U_{\mathcal{P}}(B) \to U_{\mathcal{P}}(A)$.
  Conséquence : restriction et extension des scalaires
  $$\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \leftrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(B)$$
- en $\mathcal{P}$: $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ induit $U_{\varphi}^{A} : U_{\mathcal{Q}}(\varphi^* A) \to U_{\mathcal{P}}(A)$ pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A.
  Conséquence : restriction et extension opéradique des scalaires
  $$\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \leftrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{Q}}(\varphi^* A)$$

Exemple : le morphisme $\mathcal{A}ss \to \mathcal{C}om$ induit le morphisme de multiplication
$$\mu_{A_+} : A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}} \to A_+$$
pour toute algèbre commutative A.

L'objectif du stage

Généraliser la présentation de l'enveloppante d'une algèbre de Lie à toute algèbre sur une opérade binaire quadratique.

Proposition

Pour toute algèbre A sur une opérade quadratique binaire $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E_2)/(R_3)$, on a

$$U_{\mathcal{P}}(A) \simeq \frac{T(E_2 \otimes A)}{(\partial R_3)}.$$

Ingrédients de démonstration

On note $\beta_a := \beta \otimes a \in E_2 \otimes A$.

- On a $U_{\mathcal{T}(E_2)}(p^*A) \simeq T(E_2 \otimes A)$ en faisant l'identification

$$\beta_a \cdot x = \beta^2_M(a, x)$$

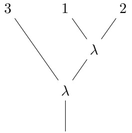
- On pose pour tout $\mu \in \mathcal{T}(E_2)(n)$:

$$\partial_i \mu(a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_n) := \mu^i_{T(E_2 \otimes A)}(a_1, \ldots, 1_T, \ldots, a_n)$$

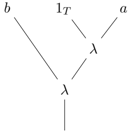
- Le morphisme $U^A_p : T(E_2 \otimes A) \to U_{\mathcal{P}}(A)$ est surjectif et son noyau est engendré par les $\partial_i r(a, b)$ pour $r \in R_3$.

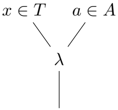
Calcul différentiel opéradique

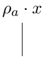
$\mu \in \mathcal{T}(E_2)(3)$

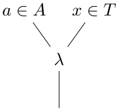
- Décomposer μ en opérations binaires : $\mu =$ 

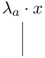
- Pour calculer $\partial_i\mu(a,b)$, on place 1_T en l'entrée i et a et b dans les entrées restantes (de la plus petite à la plus grande) :

$\partial_1\mu(a,b) =$ 

- 

$\longrightarrow$ 

(avec $\rho := \lambda \cdot (1\,2)$), 

$\longrightarrow$ 

Exemples :

- Si α est une opération anti-symétrique et que l'on note J la relation de Jacobi associée, on a

$$\begin{aligned}\partial_1 J(a,b) = \partial_2 J(b,a) = \partial_3 J(a,b) \\ = \alpha_{[a,b]} - \alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a\end{aligned}$$

- Si λ est une opération binaire sans symétrie et que l'on note As la relation d'associativité associée, on a

$$\begin{aligned}\partial_1 As(a,b) &= \rho_b\rho_a - \rho_{ab} \\ \partial_2 As(a,b) &= \rho_b\lambda_a - \lambda_a\rho_b \\ \partial_3 As(a,b) &= \lambda_{ab} - \lambda_a\lambda_b\end{aligned}$$

  si bien que

$$U_{\mathcal{A}ss}(A) = \frac{T(A^\lambda \oplus A^\rho)}{\begin{pmatrix} \rho_b\rho_a - \rho_{ab}, \\ \rho_b\lambda_a - \lambda_a\rho_b, \\ \lambda_{ab} - \lambda_a\lambda_b \end{pmatrix}} \simeq A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}}$$

Merci pour votre attention !