Introduction aux mathématiques condensées

Jules Givelet

Université de Rennes
Stage encadré par Bernard Le Stum

14 Septembre 2023

$\mathbf{Ab}(\mathbf{Top}) = \{$groupes abéliens topologiques$\}$ est une catégorie pré-abélienne :

$$\mathrm{id} : D\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{id} = 0 \Rightarrow \mathrm{id} \text{ est injectif}, \quad \mathrm{coKer}\,\mathrm{id} = 0 \Rightarrow \mathrm{id} \text{ est surjectif}$$

$\mathbf{Ab}(\mathbf{Top})$ n'est pas abélienne : $D\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}$.

Objectif

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Top} \arrow[r] & \mathsf{Topos} \\
\mathbf{Ab}(\mathbf{Top}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{Ab}(\mathsf{Topos}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Proposition

La catégorie des groupes abéliens d'un topos est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes de Grothendieck AB5 et AB3*.

1ère étape : Plongement de Yoneda

$$\mathbf{Top} \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbf{Top}^{\mathbf{op}}, \mathbf{Ens})$$

$$X \longmapsto \widehat{X}$$

$$\forall S \in \mathbf{Top},\ \widehat{X}(S) := C(S, X)$$
$$\widehat{X}(f : S_1 \to S_2) := - \circ f : C(S_2, X) \to C(S_1, X)$$

$$\mathbf{Ab}\left(\mathrm{Fun}(\mathbf{Top}^{\mathbf{op}}, \mathbf{Ens})\right) = \mathrm{Fun}(\mathbf{Top}^{\mathbf{op}}, \mathbf{Ab}).$$

Si $A \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Top})$ et $S \in \mathbf{Top}$,

$$\widehat{A}(S) = C(S, A) < A^S.$$

2ème étape : La notion de faisceau

$$\mathrm{Fun}(\mathbf{Top}^{\mathbf{op}}, \mathbf{Ens}) = \{\text{préfaisceaux}\} =: \mathrm{PSh}(\mathbf{Top})$$

Définition

Un préfaisceau $\mathcal{F} : \mathbf{Top}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ens}$ est un faisceau s'il vérifie les conditions suivantes :

(i_0) $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$.

(i) Pour tout $S_1, S_2 \in \mathbf{Top}$, la flèche

$$\mathcal{F}(J_1) \times \mathcal{F}(J_2) : \mathcal{F}(S_1 \sqcup S_2) \to \mathcal{F}(S_1) \times \mathcal{F}(S_2)$$

est bijective.

(ii) Pour toute application $\pi : S' \twoheadrightarrow S$ continue surjective, on a le diagramme d'égaliseur

$$\mathcal{F}(S) \xrightarrow{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{F}(S') \underset{\mathcal{F}(p_2)}{\overset{\mathcal{F}(p_1)}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(S' \times_S S').$$

Cas des préfaisceaux représentables par un espace topologique

Soit $X \in \mathbf{Top}$.

(i_0) $\widehat{X}(\emptyset) = C(\emptyset, X) = \{\emptyset\}$

(i) $C(S_1 \sqcup S_2, X) \simeq C(S_1, X) \times C(S_2, X)$ (propriété universelle de l'union disjointe).

(ii) On a le diagramme d'égaliseur

$$C(S, X) \xrightarrow{-\circ\pi} C(S', X) \underset{-\circ p_2}{\overset{-\circ p_1}{\rightrightarrows}} C(S' \times_S S', X)$$

à condition que $\pi : S' \twoheadrightarrow S$ **soit fermée** (propriété universelle du quotient).

3ème étape : Restriction aux espaces compacts

$\widehat{X}$ est un faisceau sur $\mathbf{Comp}$ = {espaces compacts (Haussdorf)}.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{PSh}(\mathbf{Top}) \arrow[r] & \mathrm{PSh}(\mathbf{Comp}) \\
\mathbf{Top} \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed] & \mathrm{Sh}(\mathbf{Comp}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$X \longmapsto \underline{X}$$

Attention ! Le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathrm{Sh}(\mathbf{Comp})$ est fidèle mais pas essentiellement injectif sur les objets :

$$\underline{kX} = \underline{X}$$

où kX est la k-ification de X.

Définition

Si X est un espace topologique tel que $kX = X$, on dit qu'il est compactement engendré.
$\mathbf{CG} := \{$espaces compactement engendrés$\}$.

Exemple

- kX ($k : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ est une projection)
- les espaces localement compacts

La composition $\mathbf{CG} \hookrightarrow \mathbf{Top} \to \mathrm{Sh}(\mathbf{Comp})$ est pleinement fidèle.

Plusieurs modèles possibles pour les maths condensées

$$\mathbf{Comp} \supset \mathbf{Stone} = \left\{ \begin{array}{c} \text{compacts totalement discontinus} \\ (\pi_0(X) = X) \end{array} \right\}$$

$$\supset \mathbf{ED} = \left\{ \begin{array}{c} \text{compacts extrêmement discontinus} \\ (U \text{ ouvert } \Rightarrow \overline{U} \text{ ouvert}) \end{array} \right\}$$

Théorème

Les foncteurs de restriction $\mathrm{Sh}(\mathbf{Comp}) \to \mathrm{Sh}(\mathbf{Stone}) \to \mathrm{Sh}(\mathbf{ED})$ sont des équivalences de catégories.

La catégorie $\mathbf{Cond}$ des ensembles condensés peut être définie comme n'importe laquelle de ces catégories équivalentes.

Limites et colimites

Proposition

Soit $A \subset \mathbf{Ab}(\mathrm{Sh}(\mathbf{ED}))$ un diagramme de groupes abéliens condensés. Pour tout $S \in \mathbf{ED}$, on a

$$\left(\lim_i A_i\right)(S) = \lim_i A_i(S),$$
$$\left(\operatorname{colim}_i A_i\right)(S) = \operatorname{colim}_i A_i(S).$$

Conséquence :

Théorème

La catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Cond})$ des groupes abéliens condensés est une catégorie abélienne **vérifiant les axiomes de Grothendieck AB6 et AB4***.

Exemple

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, squiggly] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\text{condensation}"] & 0 \arrow[r] & 0 \text{ (exacte)} \\ 0 \arrow[r] & \underline{D\mathbb{R}} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \underline{\mathbb{R}} \arrow[r] & \underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}} \arrow[r] & 0 \text{ (exacte)} \end{tikzcd}$$

Pour $S \in \mathbf{Stone}$,

$$(\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}})(S) = \underline{\mathbb{R}}(S)/\underline{D\mathbb{R}}(S) = \frac{C(S,\mathbb{R})}{C_{\text{loc.cste.}}(S,\mathbb{R})}.$$

Donc, si $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a $\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}}(S) \neq 0$.

Remarque : $\underline{D\mathbb{R}}(*) \simeq D\mathbb{R}$, $\underline{\mathbb{R}}(*) \simeq \mathbb{R}$ et $(\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}})(*) = 0$.

Espace sous-jacent à un ensemble condensé

Plus généralement, on peut définir un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cond} & \to & \mathbf{Top} \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(*) \end{array}$$

On a toujours $\underline{X}(*) \simeq kX$.
C'est un adjoint à la condensation :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \underline{X}) \simeq C(\mathcal{F}(*), X).$$

1 Ensembles et groupes abéliens condensés

2 Produit tensoriel et Hom interne de groupes abéliens condensés

3 Bibliographie

Abstraction du produit tensoriel

Définition

Une catégorie $\mathcal{C}$ est monoïdale symétrique si elle est munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, d'un objet $1 \in \mathcal{C}$ ainsi que d'isomorphismes naturels :

$$(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$$
$$A \otimes B \simeq B \otimes A$$
$$1 \otimes A \simeq A.$$

Propriété universelle du produit tensoriel

Définition

Une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est dite fermée si elle admet un foncteur Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}} : \mathcal{C}^{\mathbf{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ adjoint à $\otimes$:

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{Hom}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(B, C)).$$

Exemples

- Les catégories cartésiennes :
  - $(\mathbf{Ens}, \times, \{*\}, Y^X)$,
  - $(\mathbf{Top}, \times, \{*\})$ n'est pas fermée,
  - $(\mathbf{CG}, \times_k, \{*\}, kC(X, Y))$.
- $(A - \mathbf{Mod}, \otimes_A, A, \mathrm{Hom}_A)$,
- $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}})$.

Pour les ensembles condensés

$X, Y \in \mathbf{Cond}$, $S \in \mathbf{Comp}$,

$$(X \times Y)(S) = X(S) \times Y(S)$$
$$\mathcal{H}om(X, Y)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}}(X \times \underline{S}, Y).$$

Théorème

Pour tous espaces topologiques X et Y, si X est compactement engendré, alors on a un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{H}om(\underline{X}, \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \underline{C(X, Y)}.$$

Pour les groupes abéliens condensés

$A, B \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Cond})$, $S \in \mathbf{Comp}$,

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)(S) = A(S) \otimes_{\mathbb{Z}} B(S).$$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ n'est pas un faisceau en général ! Il faut faisceautiser :

$$A \widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}} B := (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\sharp}.$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}(\mathbf{Cond})}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\underline{S}], B).$$

Calcul explicite de $\underline{\mathrm{Hom}}$

Théorème

$X \in \mathbf{Cond}$, $A, B \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Cond})$,

$$\mathcal{H}om(X, B) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], B) \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Cond}).$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \hookrightarrow \mathcal{H}om(A, B).$$

Pour tous groupes topologiques A et B, si A est compactement engendré, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om(\underline{A}, \underline{B}) \arrow[r, "\sim"] & \underline{C(A, B)} \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & \underline{C_{\mathbb{Z}}(A, B)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

- Pour la théorie des faisceaux :
  - SGA4 (M. Artin, A. Grothendieck, J-L. Verdier), exposé II
  - Sketches of an elephant (P. Johnstone)
- Pour les maths condensées :
  - Lectures on Condensed Mathematics (D. Clausen, P. Scholze)
  - The fundations of Condensed Mathematics (D. Ásgeirsson)
- Pour le Hom interne en mathématiques condensées :
  - Condensed Mathematics, The internal Hom of condensed sets and condensed abelian groups and a prismatic construction of the real numbers (S. Marlasca Aparicio)
- Des sites utiles :
  - Wikipedia
  - nLab
  - The Stacks Project