Introduction aux mathématiques condensées

Jules Givelet
Rapport de stage de M1
Encadré par Bernard Le Stum

28 décembre 2024

Résumé

Ce rapport résume ce que j'ai pu apprendre lors de mon stage encadré par Bernard Le Stum que je tiens à remercier chaleureusement pour toutes ses remarques tant d'un point de vue mathématique que rédactionnel ainsi que pour ses encouragements et la motivation qu'il a su me transmettre pour étudier les mathématiques condensées. Ce stage fait suite au TER [DG23] que j'ai réalisé sur les espaces de Stone fournissant alors la plupart des prérequis topologiques nécessaires aux mathématiques condensées. Ce rapport est divisé en trois parties. Dans la première, on établit les bases catégoriques nécessaires pour définir les ensembles condensés et on définit des structure algébriques sur ceux-ci dans la deuxième. Enfin, on étudiera plus en détail comment on peut définir un produit tensoriel ainsi qu'un foncteur hom interne dans la catégorie des groupes abéliens condensés.

Table des matières

1 Topologie, faisceau et ensemble condensé

Dans tout ce qui suivra, $\mathcal{C}$ désignera une catégorie localement petite.

1.1 Topologie et prétopologies

Définition 1.1.1. Soit X un objet de $\mathcal{C}$. On note $\widehat{X} := \mathrm{Hom}(-, X) : \mathcal{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ens}$ son foncteur associé. Un *crible* sur X est un sous-foncteur de $\widehat{X}$.

Autrement dit, un crible R est la donnée pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ d'un ensemble de morphismes $R(Y) \subset \mathrm{Hom}(Y, X)$ tels que :

$$\forall (f, g) \in R(Y) \times \widehat{Y}(Z),\ f \circ g \in R(Z).$$

Par la suite, on verra à la fois R comme un foncteur et comme la collection de morphismes stable par précomposition $\bigcup_{Y \in \mathcal{C}} R(Y)$.

Proposition 1.1.2. *On peut définir les opérations suivantes sur les cribles :*

(i) Si $\{R_i\}_{i \in I}$ est une famille de cribles sur X, alors $\bigcap R_i$ est un crible sur X.

(ii) Si R est un crible sur X et $g \in \widehat{X}(Y)$, alors $g^{-1}R := \{f : \mathrm{dom}(f) \to Y \mid g \circ f \in R\}$ est un crible sur Y.

Démonstration. Pour (i), si un morphisme appartient à $\bigcap R_i$, alors ses précompositions sont dans tous les R_i et donc $\bigcap R_i$ est un crible.
Pour (ii), si $f \in g^{-1}R$ alors les précompostions de $g \circ f$ sont dans R et donc les précompositions de f sont dans $g^{-1}R$. ✿

Définition 1.1.3. Soit $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I}$ une famille de morphismes. Le *crible engendré* par $\{f_i\}$ est

$$R_{\{f_i\}} := \bigcap_{\{f_i\} \subset R} R.$$

On vérifie facilement que

$$R_{\{f_i\}}(Y) = \bigcup_{i \in I} \{f_i \circ g \mid g \in \widehat{X_i}(Y)\}.$$

Définition 1.1.4. Une *topologie* $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{C}$ est la donnée pour tout objet X d'une classe $\mathcal{T}(X)$ de cribles sur X telle que :

(A1) $\widehat{X} \in \mathcal{T}(X)$.

(A2) $\forall R \in \mathcal{T}(X), \forall g \in \widehat{X}(Y),\ g^{-1}R \in \mathcal{T}(Y)$.

(A3) Si $R \in \mathcal{T}(X)$ et R' est un autre crible sur X tel que pour tout $g \in R(Y)$, on a $g^{-1}R' \in \mathcal{T}(Y)$, alors $R' \in \mathcal{T}(X)$.

Un crible qui est dans $\mathcal{T}(X)$ sera alors appelé un *crible couvrant* de X. Une catégorie munie d'une topologie $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ est appelée un *site*.

Exemples. On peut munir $\mathcal{C}$ de la topologie triviale avec $\mathcal{T}(X) = \{\widehat{X}\}$ ou de la topologie grossière avec $\mathcal{T}(X) = \{\text{tous les cribles sur X}\}$. Les topologies que nous étudieront seront des topologies engendrées par une famille de cribles donnés. En effet, de la définition on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 1.1.5. *Soit $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ une famille de topologies sur $\mathcal{C}$. L'intersection $\bigcap \mathcal{T}_i$ définie par $(\bigcap \mathcal{T}_i)(X) = \bigcap \mathcal{T}_i(X)$ est une topologie sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration. La démonstration est immédiate. ✿

Définition 1.1.6. Soit K une classe de cribles de $\mathcal{C}$. La *topologie engendrée* par K est

$$\mathcal{T}_K := \bigcap_{K \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}.$$

En général, il est difficile de décrire les cribles couvrants d'une topologie engendrée. Mais, sous certaines hypothèse de régularité sur K, cela ne posera pas de problème et il sera même possible dans certains cas de décrire explicitement les cribles de $\mathcal{T}_K$.

Définition 1.1.7. Une *prétopologie* $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{C}$ est la donnée pour tout objet X d'une classe $\mathcal{P}(X)$ de familles de morphismes ayant pour but X telle que :
Pour tout $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathcal{P}(X)$ et pour tout $g \in \widehat{X}(Y)$, il existe $\{h_j : Y_j \to Y\}_{j\in J} \in \mathcal{P}(Y)$ telle que tout $g \circ h_j$ se factorise par un f_i :

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[r, dotted, "\exists"] \arrow[d, "\forall h_j"'] & X_i \arrow[d, "\exists f_i"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Remarque. La notion de prétopologie a d'abord été introduite dans [AGV] (exposé II, définition 1.3) sous une forme un peu différente que nous appellerons ici *prétopologie de Grothendieck* (*cf.* définition suivante). Ce l'on appelle ici une prétopologie est une notion due à Johnstone dans [Joh02] (section C2.1 définition 2.1.1) qu'il appelait « coverage » (on peut retrouver cette définition sur le nLab : `https://ncatlab.org/nlab/show/coverage`).

Lorsque l'on se donne une prétopologie $\mathcal{P}$, on peut considérer la classe des cribles engendrés par cette prétopologie $K_{\mathcal{P}} := \{R_{\{f_i\}} \mid \{f_i\} \in \mathcal{P}\}$ et la topologie engendrée $\mathcal{T}_{K_{\mathcal{P}}} =: \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. De manière générale, on dit qu'une famille de morphismes $\{f_i : X_i \to X\}$ est *couvrante* pour une topologie si le crible qu'elle engendre est couvrant pour cette topologie. Dans le cas d'une topologie engendrée par une prétopologie $\mathcal{P}$, tous les éléments de $\mathcal{P}(X)$ sont des familles couvrantes de X mais ce ne sont pas les seules en général.

Un cas important de prétopologie apparaît lorsque $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés.

Définition 1.1.8. Une *prétopologie de Grothendieck* $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{C}$ est la donnée pour tout objet X d'une classe $\mathcal{P}(X)$ de familles de morphismes ayant pour but X telle que :

(B1) Si $f \in \widehat{X}(X')$ est un isomorphisme, alors $\{f\} \in \mathcal{P}(X)$.

(B2) Si $\{f_i : X_i \to X\} \in \mathcal{P}(X)$, alors pour tout $g : Y \to X$, le pullback $Y \times_X X_i$ existe et $\{p_{Y,i} : Y \times_X X_i \to Y\} \in \mathcal{P}(Y)$.

(B3) Si $\{f_i : X_i \to X\} \in \mathcal{P}(X)$ et pour tout i, $\{g_{i,j} : X_{i,j} \to X_i\} \in \mathcal{P}(X_i)$, alors $\{f_i \circ g_{i,j}\} \in \mathcal{P}(X)$.

On voit aisément qu'une prétopologie de Grothendieck est une prétopologie en posant $Y_i = Y \times_X X_i$ puisque l'on a alors $g \circ p_{Y,i} = f_i \circ p_{X_i}$. Si $\mathcal{P}$ est une prétopologie de Grothendieck, la topologie engendrée $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ se décrit bien.

Proposition 1.1.9. *Soit $\mathcal{P}$ une prétopologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$ et $R \subset \widehat{X}$. On a $R \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}(X)$ si et seulement s'il existe une famille couvrante $\{f_i\} \in \mathcal{P}(X)$ telle que $R_{\{f_i\}} \subset R$.*

Démonstration. Si on note $\mathcal{T}$ l'ensemble des cribles contenant un crible engendré par une famille couvrante de $\mathcal{P}$, alors on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (on vérifie facilement que pour une topologie quelconque, un crible contenant un crible couvrant est un crible couvrant grâce à l'axiome (A3)). Comme $K_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{T}$, il suffit de prouver que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathcal{C}$ pour conclure que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \mathcal{T}$.

(A1) est vérifié car $\widehat{X} = R_{\{\mathrm{id}_X\}}$ et $\{\mathrm{id}_X\} \in \mathcal{P}(X)$ par (B1).

(A2) est vérifié car si $R_{\{f_i\}} \subset R$, alors $R_{\{p_{Y,i}\}} \subset g^{-1}R$, et donc par (B2), $g^{-1}R \in \mathcal{T}$.

(A3) est vérifié car si $R_{\{f_i\}} \subset R$ et $R_{\{g_{i,j}\}} \subset f_i^{-1}R'$, alors $R_{\{f_i \circ g_{i,j}\}} \subset R'$, et donc par (B3), $R' \in \mathcal{T}$. ✿

Exemples. Les objets de base des mathématiques condensées sont construits à partir de trois sites dont la topologie est engendrée par une prétopologie particulière.

— On note **Comp** la catégorie des espace compacts (que l'on suppose tous Hausdorff ici). Pour tout compact X, on pose naturellement

$$\mathcal{P}_{\mathbf{Comp}}(X) = \left\{ \{f_i : X_i \to X\}_{i \in [\![1,n]\!]} \;\middle|\; X = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(X_i) \right\}.$$

$\mathcal{P}_{\mathbf{Comp}}$ est alors une prétopologie de Grothendieck. En effet, **Comp** admet tous les pullbacks en posant (pour $f_i : X_i \to X$ et $g : Y \to X$) le produit fibré habituel

$$Y \times_X X_i := \{(y,x) \in Y \times X_i \mid g(y) = f_i(x)\}.$$

La surjectivité jointe des f_i implique alors celle des $p_{Y,i}$ ce qui vérifie l'axiome (B2). Les axiomes (B1) et (B3), eux, sont immédiats.

— On note **Stone** la catégorie des espaces de Stone (compacts totalement discontinus ce qui est équivalent au fait d'être un espace profini). C'est une sous-catégorie de **Comp** et la prétopologie précédente induit aussi une prétopologie de Grothendieck $\mathcal{P}_{\mathbf{Stone}} := \mathcal{P}_{\mathbf{Comp}|\mathbf{Stone}}$ sur **Stone**. En effet, la propriété de totale discontinuité passe à la topologie produit et à la topologie induite, donc les produits fibrés d'espace de Stone sont des espaces de Stone.

— On note **ED** la catégorie des espaces compacts extrêmement discontinus (espace dont l'adhérence d'un ouvert est ouverte). Comme précédemment, c'est une sous-catégorie de **Stone**, mais $\mathcal{P}_{\mathbf{ED}} := \mathcal{P}_{\mathbf{Stone}|\mathbf{ED}}$ n'est plus une prétopologie de Grothendieck puisque **ED** n'admet pas tous les produits fibrés (un produit d'espaces extrêmement discontinus est rarement extrêmement discontinu). Il ne semble pas évident que ce soit une prétopologie tout court. On peut toutefois considérer la topologie $\mathcal{T}_{\mathbf{ED}} := \mathcal{T}_{K_{\mathcal{P}_{\mathbf{ED}}}}$ engendrée par les cribles engendrés par les familles de $\mathcal{P}_{\mathbf{ED}}$.

Lemme 1.1.10.

(*i*) *Un espace topologique X est compact et extrêmement discontinu si et seulement si c'est un compact projectif. C'est-à-dire que pour toute application continue $f : X \to Q$, avec Q un quotient de compact par $\pi : E \twoheadrightarrow Q$, se relève en une application continue $\tilde{f} : X \to E$ telle que $\pi \circ \tilde{f} = f$.*

(*ii*) *Une partie ouverte d'un espace extrêmement discontinu est extrêmement discontinue.*

Démonstration. Pour (i), voir [Gle58]. Pour (ii), on considère un espace extrêmement discontinu X et une partie ouverte $Y \subset X$. Soit $U \subset Y$ un ouvert de Y. Il existe alors un ouvert $U' \subset X$ tel que $U = U' \cap Y$. Comme Y est ouvert dans X, U l'est aussi. Or, l'adhérence de U dans Y est $\overline{U} \cap Y$ et comme X est extrêmement discontinu, $\overline{U}$ est ouvert dans X. Donc, l'adhérence de U dans Y est ouverte. ✿

Les classes de familles couvrantes que l'on s'est données échouent à définir une prétopologie de Grothendieck pour **ED**. Ainsi, on cherche une autre classe de familles couvrantes qui engendre la même topologie que $\mathcal{P}_{\mathbf{Comp}}$ et qui induit une prétopologie (de Grothendieck si possible) pour chacune des trois catégories que l'on considère.

Proposition 1.1.11. *Soit $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Comp}, \mathbf{Stone}, \mathbf{ED}\}$. On définit $\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}(X)$ par deux types de familles couvrantes :*

— *Les familles $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ telles que l'application induite $f : \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \to X$ soit un homéomorphisme.*

— *Si $\mathcal{C} \neq$ **ED** : Les familles $\{\pi : X' \to X\}$ contenant seulement une application continue surjective.*

*$\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}$ est une prétopologie sur $\mathcal{C}$ vérifiant les axiomes (B1) et (B2) d'une prétopologie de Grothendieck et induit la même topologie que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Si $\mathcal{C} =$ **ED**, c'est une prétopologie de Grothendieck.*

Démonstration. L'axiome (B1) est évident. Montrons donc l'axiome (B2) pour le premier type de familles couvrantes. Soit $\{f_i : X_i \to X\} \in \mathcal{P}'_{\mathcal{C}}(X)$ une famille couvrante du premier type et $g : Y \to X$ une application continue. Si $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Comp}, \mathbf{Stone}\}$, on pose $Y_i := Y \times_X X_i$. La bijectivité des f_i sur leurs images induit celle des $p_{Y,i}$ et donc $p_Y : \bigsqcup_{i=1}^n Y_i \to Y$ est bijective. C'est donc en fait un homéomorphisme (elle est fermée car les espaces ici sont compacts).

Maintenant, si $\mathcal{C} = \mathbf{ED}$, tous les produits fibrés n'existent pas mais ce n'est pas le cas de ceux qui nous intéressent ici. En effet, comme les fonctions $f_i : X_i \to X$ sont des injections continues, on peut réécrire le produit fibré à l'aide de l'image réciproque : la projection $p_{Y,i} : Y \times_X X_i \to Y$ induit un homéomorphisme $Y \times_X X_i \simeq g^{-1}(f_i(X_i))$. De plus, comme les f_i sont des homéomorphismes sur leurs images respectives, $f_i(X_i) \subset X$ sont ouvertes et fermées dans X et donc $g^{-1}(f_i(X_i))$ est ouvert et fermé dans Y. Ainsi, ce dernier est compact (comme fermé d'un compact) et extrêmement discontinu (comme ouvert d'un extrêmement discontinu, *cf.* lemme précédent). Les mêmes argument pour les cas $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Comp}, \mathbf{Stone}\}$ s'appliquent encore ici pour en conclure l'axiome (B2).

Pour $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Comp}, \mathbf{Stone}\}$, on peut traiter le cas du second type de familles couvrantes exactement de la même manière que le premier.

L'axiome (B3) énonce quant à lui que l'on peut composer les recouvrements. On voit facilement que la composition de recouvrements du même type est un recouvrement de ce type. Comme **ED** n'admet qu'un type de recouvrements, il vérifie (B3) et $\mathcal{P}'_{\mathbf{ED}}$ est une prétopologie de Grothendieck. Dans les cas $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Comp}, \mathbf{Stone}\}$, on peut facilement trouver des recouvrements dans $\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}$ qui ne se composent pas.

Comparons maintenant les topologies engendrées $\mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. Comme $\mathcal{P}'_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, on a naturellement $\mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. Pour l'inclusion réciproque, considérons un crible $R_{\{f_i\}}$ engendré par une famille couvrante $\{f_i : X_i \to X\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(X)$ et montrons que $R_{\{f_i\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}}(X)$. Comme $\{f_i\}$ est une famille couvrante pour $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, l'application induite $f : \bigsqcup X_i \to X$ est surjective et $R_{\{f\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}}(X)$ si $\mathcal{C} \neq \mathbf{ED}$. En fait, si $\mathcal{C} = \mathbf{ED}$, le fait que $R_{\{f\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathbf{ED}}}$ est immédiat puisque dans ce cas, d'après le lemme 1.1.10, $R_{\{f\}} = \widehat{X}$.

On utilise l'axiome (A3) d'une topologie pour conclure. Soit $g : Y \to \bigsqcup X_i$. On a

$$(f \circ g)^{-1} R_{\{f_i\}}(Z) = \left\{ h : Z \to Y \;\middle|\; f \circ g \circ h \in R_{\{f_i\}}(Z) \right\} = g^{-1} f^{-1} R_{\{f_i\}}(Z).$$

Si on note l'inclusion $J_k : X_k \hookrightarrow \bigsqcup X_i$, on a $f \circ J_k = f_k \in R_{\{f_i\}}$, donc $J_k \in f^{-1} R_{\{f_i\}}$. Or, la famille des inclusions $\{J_i\} \in \mathcal{P}'_{\mathcal{C}}$ donc on a

$$f^{-1} R_{\{f_i\}} \supset R_{\{J_i\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}} \left(\bigsqcup_{i=1}^n X_i \right)$$

et donc $f^{-1} R_{\{f_i\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}}(\bigsqcup X_i)$. Ainsi, on a bien $(f \circ g)^{-1} R_{\{f_i\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}}(Y)$ par l'axiome (A2). Donc, pour tout $h \in R_{\{f\}}(Y)$, on a $h^{-1} R_{\{f_i\}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}}(Y)$. ✿

1.2 Faisceau sur un site

Définition 1.2.1. Un *préfaisceau* est un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ens}$. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on appellera un élément σ de $\mathcal{F}(X)$ une *section* de X. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $f^* := \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(\mathrm{codom}(f)) \to \mathcal{F}(\mathrm{dom}(f))$.

Un *morphisme de préfaisceaux* est une transformation naturelle et on note $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$.

Définition 1.2.2. Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $\{f_i : X_i \to X\}$ une famille de morphismes ayant le même codomaine. Une famille de sections $(\sigma_i) \in \prod \mathcal{F}(X_i)$ est dite *compatible* avec $\{f_i\}$ si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ X_j \arrow[r, "f_j"'] & X \end{tikzcd}$$

on a $g^*(\sigma_i) = h^*(\sigma_j)$.

Lemme 1.2.3. *Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $R \subset \widehat{X}$. Une famille de sections $(\sigma_f)_{f\in R} \in \prod_{f\in R} \mathcal{F}(\mathrm{dom}(f))$ est compatible avec R si et seulement si pour tout $f \in R(Y)$ et $g \in \widehat{Y}(Z)$, on a $\sigma_{f\circ g} = g^*(\sigma_f)$.*

Démonstration. Si (σ_f) est compatible avec R, on observe qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "f\circ g"'] & X \end{tikzcd}$$

et donc $g^*(\sigma_f) = \mathrm{id}_Z^*(\sigma_{f\circ g}) = \sigma_{f\circ g}$.

Réciproquement, soit $(f_i, f_j) \in R(X_i) \times R(X_j)$. Si on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ X_j \arrow[r, "f_j"'] & X \end{tikzcd}$$

alors $g^*(\sigma_{f_i}) = \sigma_{f_i\circ g} = \sigma_{f_j\circ h} = h^*(\sigma_j)$. ✿

Proposition 1.2.4. *Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $R \subset \widehat{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *L'application de restriction*

$$\mathrm{Hom}(\widehat{X}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(R, \mathcal{F})$$

est une bijection.

(*ii*) *Pour toute transformation naturelle $\gamma : R \to \mathcal{F}$, il existe une unique section $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ telle que pour tout $f \in R$, $\gamma(f) = f^*(\sigma)$.*

(*iii*) *Pour toute famille de sections $(\sigma_f)_{f\in R} \in \prod_{f\in R} \mathcal{F}(\mathrm{dom}(f))$ compatible avec R, il existe un unique $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tel que pour tout $f \in R$, $f^*\sigma = \sigma_f$.*

Si $R = R_{\{f_i : X_i \to X\}}$, alors ces conditions sont équivalentes à :

(*iv*) *Pour toute famille de sections $(\sigma_i) \in \prod \mathcal{F}(X_i)$ compatible avec $\{f_i\}$, il existe un unique $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tel que pour tout i, ${f_i}^*\sigma = \sigma_i$.*

Démonstration. Pour l'équivalence entre (*i*) et (*ii*), ce n'est qu'une reformulation du lemme de Yoneda qui énonce que $\mathrm{Hom}(\widehat{X}, \mathcal{F})$ est en bijection (naturelle) avec $\mathcal{F}(X)$, la transformation naturelle associée à un élément $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ étant définie par $\gamma(f) = f^*(\sigma)$.

Pour l'équivalence entre (ii) et (iii), le lemme précédent énonce qu'une famille de sections compatible avec R définie en fait une transformation naturelle $\gamma : R \to \mathcal{F}$ en posant $\gamma(f) := \sigma_f$ puisqu'on a alors $\gamma(f \circ g) = g^*(\gamma(f))$. Et réciproquement en définissant $\sigma_f := \gamma(f)$, on obtient une famille de sections compatible avec R.

Supposons maintenant $R = R_{\{f_i\}}$ et montrons que toute famille (σ_i) de sections compatible avec $\{f_i\}$ s'étend de manière unique en une famille de sections compatible avec R. Pour l'unicité, si on a $(\sigma_{f_i \circ g})_{f_i \circ g \in R}$ compatible avec R telle que $\sigma_{f_i} = \sigma_i$, alors $\sigma_{f_i \circ g} = g^*(\sigma_{f_i}) = g^*(\sigma_i)$. Ainsi, on doit nécessairement poser $\sigma_{f_i \circ g} := g^*(\sigma_i)$. La famille ainsi définie étend (σ_i) à R et on a bien la compatibilité voulue : $\sigma_{f_i \circ g \circ h} = (g \circ h)^*(\sigma_i) = h^*(g^*(\sigma_i)) = h^*(\sigma_{f_i \circ g})$.

On suppose que (iii) est vérifiée. Alors, si on a une famille (σ_i) compatible avec $\{f_i\}$, on considère la famille (σ_f) qui l'étend à R et on sait qu'il existe un unique $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tel que $f^*(\sigma) = \sigma_f$. En particulier, on a $f_i^*(\sigma) = \sigma_{f_i} = \sigma_i$ et c'est le seul σ possible puisque si on a $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tel que $f_i^*(\sigma) = \sigma_i$, alors on a $(f_i \circ g)^*(\sigma) = g^*(\sigma_i) = \sigma_{f_i \circ g}$.

Réciproquement, on suppose que (iv) est vérifiée. Si (σ_f) est une famille compatible avec R, alors sa restriction à $\{f_i\}$ est compatible avec $\{f_i\}$ et donc il existe un unique $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tel que $f_i^*(\sigma) = \sigma_{f_i}$. On a alors $(f_i \circ g)^*(\sigma) = g^*(\sigma_{f_i}) = \sigma_{f_i \circ g}$ puisque (σ_f) étend la famille (σ_{f_i}). Et la section σ est la seule possible avec cette propriété puisqu'une telle section vérifie $f_i^*(\sigma) = \sigma_{f_i}$. ✿

Définition 1.2.5. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau pour un crible R* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition précédente. On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau pour $\{f_i\}$* si la condtion (iv) est vérifiée.

On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau sur un site* $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ si c'est un faisceau pour tous les cribles de $\mathcal{T}$. La catégorie des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ sera notée $\widetilde{(\mathcal{C}, \mathcal{T})}$ ou encore $\widetilde{\mathcal{C}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Lemme 1.2.6. *Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $\{f_i : X_i \to X\}$ une famille de morphismes. Si $\mathcal{C}$ admet les pullbacks nécessaires, une famille de sections $(\sigma_i) \in \prod \mathcal{F}(X_i)$ est compatible avec $\{f_i\}$ si et seulement si pour tous indices i et j, $p_{1,i}^*(\sigma_i) = p_{2,j}^*(\sigma_j)$ avec $p_{1,i} : X_i \times_X X_j \to X_i$ et $p_{2,j} : X_i \times_X X_j \to X_j$ les projections du pullback.*

Démonstration. Le sens direct est évident puisqu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \times_X X_j \arrow[r, "p_{1,i}"] \arrow[d, "p_{2,j}"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ X_j \arrow[r, "f_j"'] & X \end{tikzcd}$$

Pour la réciproque, si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ X_j \arrow[r, "f_j"'] & X \end{tikzcd}$$

alors il existe un unique morphisme $k : Y \to X_i \times_X X_j$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X_i \times_X X_j \arrow[r, "p_{1,i}"'] \arrow[d, "p_{2,j}"] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\
& X_j \arrow[r, "f_j"'] & X
\end{tikzcd}$$

Donc si on se donne une famille de sections $(\sigma_i) \in \prod \mathcal{F}(X_i)$ telle que $p_{1,i}^*(\sigma_i) = p_{2,j}^*(\sigma_j)$, alors $g^*(\sigma_i) = k^*(p_{1,i}^*(\sigma_i)) = k^*(p_{2,j}^*(\sigma_j)) = h^*(\sigma_j)$. ✿

Remarque. Dans ce cas, on peut reformuler le fait que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour $\{f_i\}$ en disant qu'on a le diagramme d'égaliseur suivant :

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\prod f_i^*} \prod_i \mathcal{F}(X_i) \underset{\prod p_{2,j}^*}{\overset{\prod p_{1,i}^*}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(X_i \times_X X_j)$$

L'intérêt principal des prétopologies est le résultat suivant :

Théorème 1.2.7. *Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{P}$ une prétopologie sur $\mathcal{C}$. $\mathcal{F}$ est un faisceau sur le site $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est un faisceau pour toutes les familles de morphismes de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Le sens direct est simple à démontrer. En effet, si $\mathcal{F} \in \widetilde{(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\mathcal{P})}$, alors pour tout $\{f_i\} \in \mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ est un faisceau pour $R_{\{f_i\}}$ ce qui est équivalent, d'après la proposition 1.2.4, au fait que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour $\{f_i\}$.

La réciproque dans le cas général est assez longue à démontrer donc nous nous contenterons seulement du cas (beaucoup plus simple) où $\mathcal{P}$ est une prétopologie de Grothendieck (pour le cas général, voir [Joh02] section C2.1 ou [AGV] exposé II corollaire 2.3). Dans ce cas, si on se donne $R \in \mathcal{T}_\mathcal{P}(X)$, on sait grâce à la proposition 1.1.9, qu'il existe une famille couvrante $\{f_i : X_i \to X\} \in \mathcal{P}(X)$ telle que $R_{\{f_i\}} \subset R$. Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ un préfaisceau qui soit un faisceau pour toute famille de $\mathcal{P}$. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour R, on utilise la condition (ii) de la proposition 1.2.4. Soit $\gamma : R \to F$ une transformation naturelle. Posons $\sigma_i = \gamma(f_i) \in \mathcal{F}(X_i)$. On alors $p_{1,i}^*(\sigma_i) = p_{1,i}^*(\gamma(f_i)) = \gamma(f_i \circ p_{1,i}) = \gamma(f_j \circ p_{2,j}) = p_{2,j}^*(\gamma(f_j)) = p_{2,j}^*(\sigma_j)$. Donc, (σ_i) est une famille de sections compatible avec $\{f_i\}$ d'après le lemme précédent et il existe un unique $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ tel que $f_i^*(\sigma) = \sigma_i$. Soit $f \in R(Y)$. Montrons que $\gamma(f) = f^*(\sigma)$. On considère pour tout i le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X X_i \arrow[r, "p_{X_i}"] \arrow[d, "p_{Y,i}"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

On a alors $p_{Y,i}^*(\gamma(f)) = \gamma(f \circ p_{Y,i}) = \gamma(f_i \circ p_{X_i}) = p_{X_i}^*(\gamma(f_i)) = p_{X_i}^*(\sigma_i) = p_{X_i}^*(f_i^*(\sigma)) = p_{Y,i}^*(f^*(\sigma))$. Or, comme $\mathcal{P}$ est une prétopologie de Grothendieck, on a $\{p_{Y,i}\} \in \mathcal{P}(Y)$, donc $\mathcal{F}$ est un faisceau pour $\{p_{Y,i}\}$ et $\gamma(f) = f^*(\sigma)$. C'est de plus la seule section sur X possible puisqu'une telle section vérifie $f_i^*(\sigma) = \gamma(f_i) = \sigma_i$. ✿

La proposition suivante énonce que l'on peut construire un faisceau à partir d'un préfaisceau et ce de manière naturelle.

Proposition 1.2.8. *Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ un petit site. Le foncteur d'oubli $\widetilde{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ admet un adjoint à gauche $L : \widehat{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ appelé foncteur de faisceautisation.*

Démonstration. La preuve est assez longue, donc les détails ne seront pas traités ici (pour voir une démonstration complète, voir [AGV] exposé II section 3). Il faut poser

$$l\mathcal{F}(X) := \varinjlim_{R \in \mathcal{T}(X)} \mathrm{Hom}(R, \mathcal{F})$$

ce qui est possible puisque $\mathcal{C}$ est petit et donc $\mathcal{T}(X)$ est un ensemble. Plus explicitement, on a

$$\varinjlim_{R \in \mathcal{T}(X)} \mathrm{Hom}(R, \mathcal{F}) = \bigsqcup_{R \in \mathcal{T}(X)} \mathrm{Hom}(R, \mathcal{F}) \Big/ \sim$$

avec, pour $\gamma_1 : R_1 \to \mathcal{F}$ et $\gamma_2 : R_2 \to \mathcal{F}$, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si $\gamma_{1|R_1 \cap R_2} = \gamma_{2|R_1 \cap R_2}$. Par Yoneda, on a une bijection naturelle $\mathcal{F}(X) \to \mathrm{Hom}(\widehat{X}, \mathcal{F})$ qui fournit alors une transformation naturelle $\mathcal{F} \to l\mathcal{F}$.

Pour tout crible couvrant $R \subset \widehat{X}$, le morphisme $\mathrm{Hom}(\widehat{X}, l\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(R, l\mathcal{F})$ est injectif et si $\mathrm{Hom}(\widehat{X}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(R, \mathcal{F})$ est injectif, alors $\mathrm{Hom}(\widehat{X}, l\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(R, l\mathcal{F})$ est surjectif. Ainsi, $\mathrm{Hom}(\widehat{X}, ll\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(R, ll\mathcal{F})$ est bijectif et donc $L\mathcal{F} := ll\mathcal{F}$ est un faisceau.

On peut vérifier alors que toute transformation naturelle $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ avec $\mathcal{G}$ un faisceau, se factorise de manière unique de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \\ L\mathcal{F} \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

✿

Remarque. Du fait que c'est un adjoint à gauche, le foncteur de faisceautisation préserve les colimites (voir [nLa23a]). Il préserve aussi les limites finies ce qui fait de lui un foncteur *exacte* (voir [AGV] exposé II théorème 4.1).

Si l'on revient à nos topologies sur **Comp**, **Stone** et **ED**, on peut simplifier les conditions pour qu'un préfaisceau soit un faisceau.

Proposition 1.2.9. *Soit $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Comp}, \mathbf{Stone}\}$ et $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$. On a $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{C}}$ si et seulement si :*

(i_0) $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$.

(i) *Pour tous espaces X_1, X_2 de $\mathcal{C}$, l'application*

$$\mathcal{F}(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{J_1^* \times J_2^*} \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2)$$

est une bijection.

(ii) *Pour toute application continue surjective $\pi : X' \to X$, l'application*

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\pi^*} \{\sigma \in \mathcal{F}(X') \,|\, p^*_{X',1}(\sigma) = p^*_{X',2}(\sigma) \in \mathcal{F}(X' \times_X X')\}$$

est une bijection.

Si $\mathcal{C} = \mathbf{ED}$, alors $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{C}}$ si et seulement si les conditions (i_0) et (i) sont vérifiées.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ avec $\mathcal{C} \in \{\textbf{Comp}, \textbf{Stone}, \textbf{ED}\}$. D'abord, remarquons que si $\mathcal{F}$ est un faisceau, alors $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$. En effet, la famille vide est une famille couvrante de $\emptyset$ du premier type de pour $\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}$ (l'union disjointe indexée par le vide est l'ensemble vide) donc la condition que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour cette famille est qu'il existe un unique $\sigma \in \mathcal{F}(\emptyset)$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est un faisceau pour le recouvrement vide du vide si et seulement si la condition (i_0) est vérifiée.

D'après le théorème 1.2.7, $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{C}}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est un faisceau pour les familles couvrantes dans $\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}$ décrites dans la proposition 1.1.11. La condition que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour les familles couvrantes $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ du premier type ($\bigsqcup X_i \to X$ est un homéomorphisme) est équivalente par récurrence au fait que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour ce genre de familles lorsque $n \in \{0, 2\}$. Le cas $n = 0$ est le cas du recouvrement du vide par la famille vide que l'on a déjà traité. Considérons donc une famille $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in \{1,2\}}$ telle que l'application induite $f : X_1 \sqcup X_2 \to X$ soit un homéomorphisme. On remarque alors que toute famille de sections $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2)$ est compatible avec $\{f_1, f_2\}$ puisque $f_1(X_1) \cap f_2(X_2) = \emptyset$ et $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est un faisceau pour $\{f_1, f_2\}$ si et seulement si $f_1^* \times f_2^* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2)$ est une bijection. Or, comme $f \circ J_i = f_i$, on a $J_i^* \circ f^* = f_i^*$ et donc $(J_1^* \times J_2^*) \circ f^* = f_1^* \times f_2^*$. Ainsi, $f_1^* \times f_2^*$ est une bijection si et seulement si $J_1^* \times J_2^*$ est une bijection car f^* en est une aussi (f est un homéomorphisme).

Si $\mathcal{C} \neq \textbf{ED}$, la condition pour $\mathcal{F}$ d'être un faisceau pour le second type de familles couvrantes dans $\mathcal{P}'_{\mathcal{C}}$, est équivalente à la condition (ii) d'après le lemme 1.2.6. ✿

Ainsi, il est clair que les foncteurs de restriction de préfaisceaux induisent des foncteurs de restrictions sur les catégories de faisceaux respectives commutant alors avec les foncteurs d'oubli :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\textbf{Comp}} \arrow[r] & \widehat{\textbf{Stone}} \arrow[r] & \widehat{\textbf{ED}} \\
\widetilde{\textbf{Comp}} \arrow[r] \arrow[u] & \widetilde{\textbf{Stone}} \arrow[r] \arrow[u] & \widetilde{\textbf{ED}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

1.3 Ensemble condensé

Définition 1.3.1. Un *ensemble condensé* est un faisceau sur le site $(\textbf{Stone}, \mathcal{T}_{\textbf{Stone}})$. On désigne alors par $\mathrm{Cond}(\textbf{Ens}) := \widetilde{\textbf{Stone}}$ la catégorie des ensembles condensés.

Remarques.

— La catégorie **Stone** n'est pas petite ce qui pose un problème lorsque l'on souhaite faisceautiser les préfaisceaux (*cf.* propostion 1.2.8). Ainsi, il est préférable de définir un ensemble condensé comme un faisceau de $\widetilde{\textbf{Stone}}$ qui est l'extension de Kan à gauche de sa restriction sur $\textbf{Stone}_\kappa$, la (petite) catégorie des espaces de Stone κ-petits où κ est un cardinal fortement inaccessible. Nous ne nous soucieront pas vraiment de ce genre de détail ici.

— La notion de faisceau introduite dans la section 1.2 est celle de faisceau d'ensembles. On peut aussi définir la notion de faisceau de groupes, d'anneaux, de A-module, *etc.* en disant qu'un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \textbf{Grp}/\textbf{Ann}/A-\textbf{Mod}$ est un faisceau si $U \circ \mathcal{F}$ est un faisceau d'ensemble avec U le foncteur d'oubli vers **Ens**. Ainsi, on peut définir $\mathrm{Cond}(\textbf{Ab})$, la catégorie des faisceaux de groupes abéliens que l'on étudiera dans la section 2.

Exemple. L'exemple fondamental d'ensemble condensé est l'ensemble condensé associé à un espace topologique. Soit X un espace topologique. On considère son foncteur associé $\widehat{X} \in \widehat{\textbf{Top}}$ et la restriction de celui-ci à **Comp** que l'on note $\underline{X} := \widehat{X}_{|\textbf{Comp}} \in \widehat{\textbf{Comp}}$. On voit que ce préfaisceau est bien un faisceau en vérifiant les conditions énoncées dans la propriété 1.2.9 :

(i_0) On a $\underline{X}(\emptyset) = \mathrm{Hom}(\emptyset, X)$ qui ne contient que l'application vide.

(i) Le fait que l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}(K_1 \sqcup K_2, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K_1, X) \times \mathrm{Hom}(K_2, X)$$

soit bijective est une reformulation de la propriété universelle de la somme.

(*ii*) Soit $\pi : K' \to K$ une application continue surjective entre compacts et $f \in \underline{X}(K')$. La condition $p_{K',1}^*(f) = p_{K',2}^*(f)$ est alors équivalente à :

$$\forall x, y \in K',\ (\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow f(x) = f(y))\,.$$

Or, comme K' et K sont compacts, π est fermée et comme elle est de plus surjective, K a la topologie quotient induite par π. Ainsi, la propriété universelle du quotient énonce que l'application

$$\mathrm{Hom}(K, X) \xrightarrow{\pi\circ -} \left\{f \in \mathrm{Hom}(K', X)\,|\,p_{K',1}^*(f) = p_{K',2}^*(f)\right\}$$

est une bijection.

Finalement, on a $\underline{X} \in \widetilde{\mathbf{Comp}}$ et pour définir un ensemble condensé, il faut considérer la restriction de $\underline{X}$ à $\mathbf{Stone}$.

Remarque. Si l'on souhaite définir un ensemble condensé qui est l'extension de Kan à gauche de sa restriction à $\mathbf{Stone}_\kappa$ (*cf.* remarque suivant la définition 1.3.1) avec cette méthode, il faut et il suffit que X soit T_1 *i.e* les singletons sont fermés dans X (voir [CS19b], Warning 2.14 et Proposition 2.15).

Le fait de considérer la restriction $\underline{X}_{|\mathbf{Stone}}$ au lieu de $\underline{X}$ n'a pas beaucoup d'importance puisque les foncteurs de restriction

$$\widetilde{\mathbf{Comp}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{Stone}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{ED}}$$

sont en fait des équivalences de catégories. Pour le voir, on a besoin de la compactification de Stone-Čech $\beta : \mathbf{Top} \to \mathbf{Comp}$. En effet, on a le résultat suivant :

Lemme 1.3.2. *Un espace topologique est un compact projectif (donc un compact extrêmement discontinu* cf. *lemme 1.1.10) si et seulement si c'est un rétracte de la compactification de Stone-Čech d'un espace discret.*

Démonstration. Voir [Rai59]. ✿

Ainsi, si on note $D : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Top}$ le foncteur qui à X associe l'ensemble sous-jacent à X muni de la topologie discrète, on a $\beta \circ D : \mathbf{Comp} \to \mathbf{ED}$. On pose alors $P := \beta \circ D$.

Proposition 1.3.3. *Il existe une transformation naturelle surjective $\pi : i \circ P \to \mathrm{id}_{\mathbf{Comp}}$ où $i : \mathbf{ED} \to \mathbf{Comp}$ est le foncteur d'inclusion.*

Démonstration. Soit X un espace compact. L'application identité $\mathrm{id} : DX \to X$ est continue car la topologie discrète est plus fine que la topologie de X. On note $e_{DX} : DX \to \beta DX$ l'application de compactification de DX. La propriété universelle de la compactification de Stone-Čech énonce alors que comme X est compact, il existe une unique application $\overline{\mathrm{id}} : \beta DX \to X$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} DX \arrow[r, "e_{DX}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \beta DX \arrow[d, dotted, "\overline{\mathrm{id}}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

On définit $\pi_X := \overline{\mathrm{id}} : PX \to X$ qui est alors surjective puisque $\mathrm{id} : DX \to X$ l'est. Vérifions qu'on a le diagramme suivant pour toute application continue $f : X \to Y$:

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "\pi_X"'] & PY \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

L'application Pf est définie comme étant l'unique application continue (fournie par la propriété universelle de la compactification de Stone-Čech) faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r, "Pf"] & PY \\ DX \arrow[u, "e_{DX}"] \arrow[r, "Df"'] & DY \arrow[u, "e_{DY}"'] \end{tikzcd}$$

De plus, Df est définie comme l'unique application continue faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ DX \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "Df"'] & DY \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Donc, on a $\pi_Y \circ Pf \circ e_{DX} = \pi_Y \circ e_{DY} \circ Df = \mathrm{id} \circ Df = f \circ \mathrm{id} = f \circ \pi_X \circ e_{DX}$. Ainsi, comme Y est compact, par propriété universelle de la compactification de Stone-Čech, on a $\pi_Y \circ Pf = f \circ \pi_X$. ✿

Lemme 1.3.4 (lemme de comparaison)**.** *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ *un site localement petit et* $\mathcal{C}'$ *une petite sous-catégorie pleine de* $\mathcal{C}$ *tel que :*

- *Tout objet de* $\mathcal{C}$ *peut être recouvert par des objets de* $\mathcal{C}'$*.*
- *Le foncteur d'inclusion* $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *préserve les produits fibrés.*

En munissant $\mathcal{C}'$ *de la topologie induite par celle de* $\mathcal{C}$ *(une famille de morphismes de* $\mathcal{C}'$ *est couvrante si elle l'est pour* $\mathcal{C}$*), le foncteur de restriction* $\widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{C}'}$ *est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. La preuve de ce résultat est assez technique et repose sur l'existence d'un foncteur $\widehat{\mathcal{C}'} \to \widehat{\mathcal{C}}$ adjoint à gauche du foncteur de restriction. Pour plus de détails, voir [AGV] exposé III Théorème 4.1. ✿

Théorème 1.3.5. *Les foncteurs de restrictions* $\widetilde{\mathbf{Comp}} \to \widetilde{\mathbf{Stone}} \to \widetilde{\mathbf{ED}}$ *sont des équivalences de catégories.*

Démonstration. D'après la proposition 1.3.3, tout espace compact X est recouvert par le compact extrêmement discontinu βDX. Ainsi, on peut appliquer le lemme de comparaison précédent pour conclure. ✿

1.4 Adjonction entre ensembles condensés et espaces topologiques

L'association $X \mapsto \underline{X}$ vue précédemment (*cf.* exemple suivant la définition 1.3.1) est en fait fonctorielle puisque c'est la composée du plongement de Yoneda $\mathbf{Top} \to \widehat{\mathbf{Top}}$ et du foncteur de restriction $\widehat{\mathbf{Top}} \to \widehat{\mathbf{Comp}}$. Bien que le plongement de Yoneda soit pleinement fidèle, la restriction $\widehat{\mathbf{Top}} \to \widehat{\mathbf{Comp}}$, elle, ne l'est pas. Ainsi, on cherche une classe d'espaces topologiques telle que, sur cette classe, $X \mapsto \underline{X}$ soit pleinement fidèle.

Définition 1.4.1. Soit X un espace topologique. La *k-ification* de X est l'ensemble X muni de la topologie finale induite par la famille de toutes les applications continues $K \to X$ partant d'un espace compact. On note l'espace topologique obtenu kX et on dit que X est *compactement engendré* si $kX = X$.

La topologie de kX est décrite par le fait qu'une partie $A \subset kX$ est ouverte si et seulement si pour tout compact K et toute application continue $f : K \to X$, l'image réciproque $f^{-1}(A) \subset K$ est ouverte. Ainsi, la topologie de kX raffine celle de X et en particulier, $\mathrm{Hom}(Y, kX) \subset \mathrm{Hom}(Y, X)$ pour tout espace topologique Y. Lorsque Y est compact, la caractérisation des ouverts précédente montre l'inclusion réciproque et donc pour tout compact K, on a

$$\mathrm{Hom}(K, kX) = \mathrm{Hom}(K, X).$$

Ainsi, on a $kkX = kX$ et kX est toujours compactement engendré. Du point de vue condensé, cela se traduit par le fait que $\underline{kX} = \underline{X}$.

Ce qui rend les espaces compactement engendrés intéressant ici est leur propriété universelle : Soit X un espace compactement engendré. Pour qu'une application $f : X \to Y$ soit continue il faut et il suffit que, pour toute application continue partant d'un espace compact $h : K \to X$, l'application $f \circ h : K \to Y$ soit continue. Cette propriété permet alors d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 1.4.2. *Le foncteur* $\mathbf{Top} \to \widetilde{\mathbf{Comp}}$ *qui a* X *associe* $\underline{X}$ *est fidèle. Si* X *est compactement engendré, alors ce foncteur induit, pour tout espace* Y*, une bijection* $C(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{X}, \underline{Y})$*. En particulier, sa restriction à la catégorie des espaces compactement engendrés est pleinement fidèle.*

Démonstration. Soit $\gamma : \underline{X} \to \underline{Y}$ une transformation naturelle entre les faisceaux induits par des espaces topologiques X et Y. Supposons qu'il existe une application continue $f : X \to Y$ telle que pour toute application continue $h : K \to X$ avec K compact, on a $\gamma_K(h) = \underline{f}(h) = f \circ h$. Pour deux espaces topologiques quelconques T, T' et pour tout $t \in T$, on note $C_t^{T'} \in \mathrm{Hom}(T', T)$ l'application constante égale à t. On note $*$ l'espace topologique ne contenant qu'un point. On a alors pour tout $x \in X$

$$\gamma_*(C_x^*) = f \circ C_x^* = C_{f(x)}^*.$$

Donc, $f(x) = \gamma_*(C_x^*)(*)$ ce qui prouve l'unicité de f et donc le caractère fidèle de $X \mapsto \underline{X}$.

La formule pour f que l'on vient de trouver fonctionne bien puisque pour tout compact K et pour tout $k \in K$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(*, X) \arrow[r, "\gamma_*"] & \mathrm{Hom}(*, Y) \\
\mathrm{Hom}(K, X) \arrow[u, "\underline{X}(C_k^*)"] \arrow[r, "\gamma_K"'] & \mathrm{Hom}(K, Y) \arrow[u, "\underline{Y}(C_k^*)"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi, pour toute application continue $h : K \to X$, on a pour tout $k \in K$:

$$\begin{aligned}
\gamma_K(h)(k) &= (\gamma_K(h) \circ C_k^*)(*) = \underline{Y}(C_k^*)(\gamma_K(h))(*) \\
&= \gamma_*(\underline{X}(C_k^*)(h))(*) = \gamma_*(h \circ C_k^*)(*) = \gamma_*(C_{h(k)}^*)(*) \\
&= f(h(k)).
\end{aligned}$$

Il ne reste en fait plus qu'à montrer que f est continue pour que $X \mapsto \underline{X}$ soit plein et lorsque X est compactement engendré, c'est immédiat. En effet, dans ce cas, pour toute application continue $h : K \to X$ partant d'un compact, on a $f \circ h = \gamma_k(h) \in \mathrm{Hom}(K, Y)$, donc en particulier, $f \circ h$ est continue et par la propriété universelle des espaces compactement engendrés, f est continue. ✿

Le fait que l'ensemble $\underline{X}(*) = \mathrm{Hom}(*, X)$ apparaisse dans cette démonstration n'est pas anodin puisqu'il est en bijection naturelle avec X. C'est ainsi que l'on souhaite passer du point de vue condensé au point de vue topologique.

Définition 1.4.3. *L'espace sous-jacent* à un faisceau $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathbf{Comp}}$ est l'ensemble $\mathcal{F}(*)$ muni de la topologie finale sur la famille de toutes les applications $K \to \mathcal{F}(*)$, partant d'un compact K, induites par une transformation naturelle $\hat{K} \to \mathcal{F}$.

Remarques.

— Si on se donne une transformation naturelle $\gamma : \widehat{K} \to \mathcal{F}$, l'application induite $K \to \mathcal{F}(*)$ est $\gamma_* : \widehat{K}(*) \to \mathcal{F}(*)$ que l'on précompose par la bijection naturelle $K \to \widehat{K}(*)$. On ne fera désormais plus de distinction ensembliste entre $\underline{X}(*)$ et X.

— En outre, on peut facilement montrer que cette bijection naturelle induit alors un homéomorphisme naturel $\underline{X}(*) \simeq kX$ puisque, compte tenu du lemme de Yoneda, la donnée d'une transformation naturelle $\widehat{K} \to \underline{X}$ est équivalente à la donnée d'une application continue $K \to X$.

— Cette construction est alors fonctorielle. En effet, si on a une transformation naturelle $\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, alors l'application $\gamma_* : \mathcal{F}(*) \to \mathcal{G}(*)$ est continue :
Soit $\eta : \widehat{K} \to \mathcal{F}$ une transformation naturelle. Montrons que $\gamma_* \circ \eta_* : K = \widehat{K}(*) \to \mathcal{G}(*)$ est continue. Comme $\gamma \circ \eta$ est une transformation naturelle, $(\gamma \circ \eta)_* = \gamma_* \circ \eta_*$ est continue d'après la définition de la topologie de $\mathcal{G}(*)$. Ainsi, d'après la définition de la topologie de $\mathcal{F}(*)$, l'application γ_* est continue.

Théorème 1.4.4. *Le foncteur* $\mathbf{Top} \to \widetilde{\mathbf{Comp}}$*, qui à* X *associe* $\underline{X}$*, admet pour adjoint à gauche le foncteur* $\widetilde{\mathbf{Comp}} \to \mathbf{Top}$ *qui à un faisceau* $\mathcal{F}$ *associe l'espace sous-jacent* $\mathcal{F}(*)$ *: Pour tout* $X \in \mathbf{Top}$ *et* $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathbf{Comp}}$*, on a une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \underline{X}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(*), X).$$

Démonstration. On considère la transformation naturelle canonique $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \underline{X}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(*), X)$ qui à $\gamma : \mathcal{F} \to \underline{X}$ associe la composition $f_\gamma : \mathcal{F}(*) \xrightarrow{\gamma_*} \underline{X}(*) = kX \longrightarrow X$. Montrons que c'est une bijection en exhibant une réciproque.

Si $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(*), X)$, on définit une transformation naturelle $\gamma_f : \mathcal{F} \to \underline{X}$ de la manière suivante : Pour tout compact K, on note $\gamma_\sigma : \widehat{K} \to \mathcal{F}$ la transformation naturelle induite par $\sigma \in \mathcal{F}(K)$. L'application $\gamma_{\sigma *} : K \to \mathcal{F}(*)$ (qui à k associe $\mathcal{F}(C_k^*)(\sigma)$) est alors continue et on note la composition $\gamma_{fK}(\sigma) : K \xrightarrow{\gamma_{\sigma *}} \mathcal{F}(*) \xrightarrow{f} X$. On a alors défini une application $\gamma_{fK} : \mathcal{F}(K) \to \underline{X}(K)$ et il reste à montrer que le diagramme suivant commute pour tout $g \in \mathrm{Hom}(K', K)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(K) \arrow[r, "\gamma_{fK}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"'] & \underline{X}(K) \arrow[d, "-\circ g"] \\
\mathcal{F}(K') \arrow[r, "\gamma_{fK'}"'] & \underline{X}(K')
\end{tikzcd}$$

Soit $\sigma \in \mathcal{F}(K)$ et $k \in K'$. On a

$$\begin{aligned}
\gamma_{fK'}(\mathcal{F}(g)(\sigma))(k) &= f(\gamma_{\mathcal{F}(g)(\sigma)*}(k)) = f(\mathcal{F}(C_k^*)(\mathcal{F}(g)(\sigma))) = f(\mathcal{F}(g \circ C_k^*)(\sigma)) = f(\mathcal{F}(C_{g(k)}^*)(\sigma)) \\
&= f(\gamma_{\sigma *}(C_{g(k)}^*)) = (f \circ \gamma_{\sigma *} \circ g)(k) = (\gamma_{fK}(\sigma) \circ g)(k).
\end{aligned}$$

Donc, $\gamma_{fK'}(\mathcal{F}(g)(\sigma)) = \gamma_{fK}(\sigma) \circ g$ et $\gamma_f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \underline{X})$.

Ainsi, il ne reste plus qu'à montrer que $\gamma_{f_\gamma} = \gamma$ et $f_{\gamma_f} = f$. Soit $\gamma : \mathcal{F} \to \underline{X}$. On a pour tout $\sigma \in \mathcal{F}(K)$, $\gamma_{f_\gamma K}(\sigma) = f_\gamma \circ \gamma_{\sigma *} = \gamma_* \circ \gamma_{\sigma *}$. Or, pour tout $k \in K$, $\gamma_*(\gamma_{\sigma *}(C_k^*)) = \gamma_*(\mathcal{F}(C_k^*)(\sigma)) = \gamma_K(\sigma) \circ C_k^* = C_{\gamma_K(\sigma)(k)}^*$. Donc, $\gamma_{f_\gamma K}(\sigma) = \gamma_K(\sigma)$.

Soit $f : \mathcal{F}(*) \to X$. On a pour tout $\sigma \in \mathcal{F}(*)$, $f_{\gamma_f}(\sigma) = \gamma_{f*}(\sigma) = f \circ \gamma_{\sigma *}$. Or, comme $C_*^* = \mathrm{id}_*$, on a $f(\gamma_{\sigma *}(C_*^*)) = f(\mathcal{F}(C_*^*)(\sigma)) = f(\sigma)$. Donc, $f_{\gamma_f}(\sigma) = f(\sigma)$. ✿

Remarque. On retrouve en fait la proposition 1.4.2, puisqu'on a alors

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}(kX, Y) = \mathrm{Hom}(\underline{X}(*), Y) = \mathrm{Hom}(\underline{X}, \underline{Y})$$

par adjonction.

2 Groupes abéliens condensés

2.1 Catégorie abélienne

Le but de cette première section est de faire les rappels nécessaires sur les catégories abéliennes et les axiomes de Grothendieck. Pour une lecture plus détaillée du sujet, je vous recommande la lecture des premiers chapitres de [Pop73]. Le lecteur maitrisant déjà toutes ces notions pourra passer directement à la section 2.2.

Définition 2.1.1. Une catégorie *pré-additive* est une catégorie $\mathcal{A}$ telle que pour tous objets X et Y de $\mathcal{A}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est muni d'une structure de groupe abélien rendant la composition de morphismes bilinéaire. On note alors $0_{X,Y}$ l'élément neutre de $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

Une catégorie pré-additive est dite *additive* si elle admet tous les produits finis.

Remarque. Si $\mathcal{A}$ est pré-additive alors on voit facilement que sa catégorie duale $\mathcal{A}^{\mathbf{op}}$ est pré-additive. On peut aussi montrer que si $\mathcal{A}$ est additive, alors $\mathcal{A}^{\mathbf{op}}$ l'est aussi grâce au résultat suivant.

Proposition 2.1.2. *Dans une catégorie pré-additive, un produit fini est aussi une somme.*

Démonstration. Par récurrence, on se ramène au cas d'un produit de deux objets X_1 et X_2. On note les projections du produit $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ et on pose $J_i := \mathrm{id}_{X_i} \times 0_{X_i,X_j}$, avec $j \neq i$. On a alors $p_i \circ (J_1 \circ p_1 + J_2 \circ p_2) = \mathrm{id}_{X_i}$ et donc $J_1 \circ p_1 + J_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_{X_1 \times X_2}$.

Si on se donne des morphismes $f_i : X_i \to Y$ et $f : X_1 \times X_2 \to Y$ tels que $f \circ J_i = f_i$, alors on a

$$f = f \circ (J_1 \circ p_1 + J_2 \circ p_2) = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2$$

et on peut vérifier que cette dernière expression vérifie bien $f \circ J_i = f_i$. ✿

Ainsi, une catégorie additive admet aussi toutes les sommes finies que l'on note dans ce cadre avec le symbole $\bigoplus$. De plus, l'objet final (produit vide) est alors aussi initial (somme vide) ce qui fait de lui un objet zéro sobrement noté 0. Le morphisme $0_{X,Y}$ est alors la composée $X \to 0 \to Y$ et la somme de deux morphismes $f, g : X \to Y$ est égale à la composition

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y = Y \oplus Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \oplus \mathrm{id}_Y} Y.$$

Définition 2.1.3. Une catégorie *pré-abélienne* est une catégorie additive vérifiant l'axiome de Grothendieck AB1 : Tout morphisme $f : X \to Y$ admet un noyau $\mathrm{Ker}\, f \to X$ et un conoyau $Y \to \mathrm{coKer}\, f$.

Remarques.

- La catégorie duale d'une catégorie pré-abélienne est pré-abélienne.
- Dans une catégorie pré-abélienne, on peut montrer qu'un morphisme f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = 0$ et dualement, f est un épimorphisme si et seulement si $\mathrm{coKer}\, f = 0$.

Pour rappel, un noyau de $f : X \to Y$ est un égaliseur de f et $0_{X,Y}$ et de manière duale, un conoyau de f est un coégaliseur de f et $0_{X,Y}$. Dans une catégorie pré-abélienne, on appelle *image* de f le noyau de son conoyau et de manière duale sa *coimage*, le conoyau de son noyau :

$$\mathrm{Im}\, f := \mathrm{Ker}(\mathrm{coKer}\, f) \qquad \mathrm{coIm}\, f := \mathrm{coKer}(\mathrm{Ker}\, f)$$

Pour tout sous-objet (X', i) de X, on note $X/X' := \mathrm{coKer}\, i$. On peut alors définir dans les catégories pré-abéliennes les notions d'intersection et de somme de sous-objets $X_1, X_2 \subset X$:

$$X_1 \cap X_2 := \mathrm{Ker}(X \to X/X_1 \times X/X_2) \qquad X_1 + X_2 := \mathrm{Im}(X_1 \oplus X_2 \to X)$$

Proposition 2.1.4. *Dans une catégorie pré-abélienne, tout morphisme $f : X \to Y$ admet une unique décomposition de la forme suivante :*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r] & \operatorname{coKer} f \\
 & \operatorname{coIm} f \arrow[r, "\overline{f}"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il s'agit seulement d'appliquer les propriétés universelles de la coimage et de l'image successivement (peu importe l'ordre d'application d'ailleurs). ✿

Définition 2.1.5. Une catégorie pré-abélienne est *abélienne* si elle vérifie l'axiome de Grothendieck AB2 : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, le morphisme associé $\overline{f} : \operatorname{coIm} f \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.

Remarques.

— La catégorie duale d'une catégorie abélienne est abélienne.

— Dans une catégorie abélienne, un morphisme est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{Ker} f = 0$ (*i.e* f est un monomorphisme) et $\operatorname{coKer} f = 0$ (*i.e* f est un épimorphisme) puisque dans ce cas, on a $f = \overline{f}$.

Exemple. L'exemple de catégorie abélienne qui nous intéresse le plus ici est la catégorie **Ab** des groupes abéliens. Ses sommes, produits, noyaux et conoyaux sont bien connus et l'axiome AB2 est le théorème d'isomorphisme de Noether.

Proposition 2.1.6. *Dans une catégorie abélienne, si l'on considère un sous objet $X' \subset X$, alors $X' = \operatorname{Im}(X' \to X)$. Dualement, si l'on considère un épimorphisme (objet quotient) $p : X \to X''$, alors $X'' = X/\operatorname{Ker} p (= \operatorname{coIm} p)$.*

Démonstration. Par passage à la catégorie duale, il suffit de prouver la première assertion. On considère $i : X' \to X$ un monomorphisme associé à X'. Comme on est dans une catégorie abélienne, on a $\operatorname{Im} i = \operatorname{coIm} i$. Or, $\operatorname{coIm} i = \operatorname{coKer}(0 \to X') = X'$. ✿

Ainsi, tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme et un conoyau. De plus, on a une bijection naturelle entre les sous-objets de X et les objets quotients de X : à un sous-objet X', on associe X/X' et à un objet quotient, on associe son noyau. Cela permet de simplifier parfois les questions d'exactitude.

Définition 2.1.7. Dans une catégorie (pré-)abélienne, on dit qu'une suite de morphismes

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

est *exacte en Y* si $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Plus généralement, on dira qu'une suite de morphismes est *exacte* si elle est exacte en tout objet.

Un foncteur $\mathcal{F}$ entre deux catégories (pré-)additive est *additif* si l'application associée à tous objets X et Y, $\mathcal{F} : \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(FX, FY)$ est un morphisme de groupes abéliens.

On dira qu'un foncteur additif $\mathcal{F}$ entre deux catégories (pré-)abéliennes est *exact à gauche* s'il transforme les suites *exactes courtes* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ en suite *exacte courte à gauche* $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Z)$. On dira qu'il est *exact à droite*, s'il transforme les suites exactes courtes en suites *exacte courtes à droite* $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Z) \to 0$. Enfin, on dira que $\mathcal{F}$ est *exact* s'il est exact à gauche et à droite.

Dans son article [Gro57], Grothendieck introduit d'autres axiomes ABi lui permettant d'étudier ce que l'on appelle aujourd'hui des catégories de Grothendieck. Celles-ci sont très régulières vis-à-vis de leurs limites et colimites : outre l'existence de celles-ci, elles ont souvent la propriété d'être exactes et de commuter entre elles.

Définition 2.1.8. Une catégorie abélienne vérifie l'axiome AB3 si elle admet toutes les sommes. De manière duale, elle vérifie AB3* si elle admet tous les produits.

Remarque. Une catégorie abélienne vérifiant AB3 (*resp.* AB3*) admet alors toutes les colimites (*resp.* limites) puisqu'une telle catégorie admet toutes les sommes (*resp.* produits) et tous les coégaliseurs (*resp.* égaliseurs) grâce aux conoyaux (*resp.* noyaux).

Proposition 2.1.9. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.*

(i) *Si $\mathcal{A}$ vérifie AB3, alors pour tout ensemble d'indexation I, le foncteur $\mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$ qui à $(X_i)_{i\in I}$ associe $\bigoplus X_i$ est exact à droite.*

(i^*) *Si $\mathcal{A}$ vérifie AB3*, alors pour tout ensemble d'indexation I, le foncteur $\mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$ qui à $(X_i)_{i\in I}$ associe $\prod X_i$ est exact à gauche.*

Démonstration. Par passage à la catégorie duale, il suffit de démontrer (i). On considère pour tout $i \in I$, une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \longrightarrow 0$$

On a alors le diagramme commutatif suivant pour tout $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "J_{X_i}"'] & Y_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "J_{Y_i}"'] & Z_i \arrow[r] \arrow[d, "J_{Z_i}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus X_i \arrow[r, "\bigoplus f_i"'] & \bigoplus Y_i \arrow[r, "\bigoplus g_i"'] & \bigoplus Z_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\bigoplus Z_i = \mathrm{coKer}(\bigoplus f_i)$ (cela prouvera que $\bigoplus g_i$ est un épimorphisme et qu'on a $\mathrm{Im}(\bigoplus f_i) = \mathrm{Ker}(\bigoplus g_i)$ et donc que la ligne en bas de notre diagramme est exacte à droite). On a évidemment $\bigoplus g_i \circ \bigoplus f_i = 0$ puisque pour tout $i \in I$, on a $\bigoplus g_i \circ \bigoplus f_i \circ J_{X_i} = J_{Z_i} \circ g_i \circ f_i = 0$. Soit $h : \bigoplus Y_i \to A$ tel que $h \circ \bigoplus f_i = 0$. Supposons qu'il existe $\overline{h} : \bigoplus Z_i \to A$ tel que $\overline{h} \circ \bigoplus g_i = h$. On a alors pour tout $i \in I$, $\overline{h} \circ J_{Z_i} \circ g_i = h \circ J_{Y_i}$. Or, $h \circ J_{Y_i} \circ f_i = h \circ \bigoplus f_i \circ J_{X_i} = 0$ et $Z_i = \mathrm{coKer}\, f_i$. Ainsi, $\overline{h}_i := \overline{h} \circ J_{Z_i}$ est l'unique morphisme tel que $\overline{h}_i \circ g_i = h \circ J_{Y_i}$ et $\overline{h}$ est l'unique morphisme tel que $\overline{h}_i = \overline{h} \circ J_{Z_i}$.

Le morphisme $\overline{h}$ ainsi défini vérifie bien ce que l'on veut puisque pour tout $i \in I$, on a

$$\overline{h} \circ \bigoplus g_i \circ J_{Y_i} = \overline{h} \circ J_{Z_i} \circ g_i = h \circ J_{Y_i}$$

et donc $\overline{h} \circ \bigoplus g_i = h$. ✿

Remarque. Le résultat 2.1.6 implique en fait la proposition 2.1.9 puisque la notion d'exactitude à droite peut alors se reformuler comme la commutation avec les conoyaux (et même chose de manière duale). Or, les conoyaux et les sommes sont des colimites et les colimites commutent toujours avec les colimites. On aura besoin de ce résultat et d'une généralisation de celui-ci à plusieurs reprise dans la prochaine section. Néanmoins, cela montre que l'on peut en fait généraliser la proposition précédente aux limites et colimites : Toutes les colimites sont exactes à droite et toutes les limites sont exactes à gauche.

Définition 2.1.10. Une catégorie abélienne vérifie l'axiome AB4 si elle vérifie AB3 et si les sommes sont exactes.

De manière duale, l'axiome AB4* est vérifié si AB3* est vérifié et si les produits sont exact.

Remarque. D'après la proposition précédente, une catégorie AB3 est AB4 si et seulement ses sommes préservent les monomorphismes et une catégorie AB3* est AB4* si et seulement si ses produits préservent les épimorphismes.

Définition 2.1.11. Une catégorie abélienne vérifie l'axiome AB5 si elle vérifie AB3 et si les colimites filtrées sont exactes.

Une catégorie abélienne vérifie l'axiome AB5* si elle vérifie AB3 et si les limites cofiltrées sont exactes.

Proposition 2.1.12. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne vérifiant AB3. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{A}$ vérifie AB5.

(ii) Pour toute catégorie filtrante I et pour toute suite exacte courte de systèmes inductifs

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

de $\mathcal{A}^I$, le morphisme induit $\varinjlim \mathcal{F} \to \varinjlim \mathcal{G}$ est un monomorphisme de $\mathcal{A}$.

(iii) Pour tout ensemble filtrant à droite $\{X_i\}$ de sous-objet de $X \in \mathcal{A}$, le morphisme $\varinjlim X_i \to X$ induit par les injections des sous-objets forme un isomorphisme

$$\varinjlim X_i \simeq \sum X_i \left(:= \operatorname{Im}\left(\bigoplus X_i \to X \right) \right).$$

(iv) Pour tout ensemble filtrant à droite $\{X_i\}$ de sous-objets de $X \in \mathcal{A}$ et pour tout sous-objet $X' \subset X$, on a

$$\sum (X_i \cap X') = \left(\sum X_i \right) \cap X'.$$

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) se déduit de ce qui a été dit dans la remarque précédente. Pour les autres, voir [Pop73] (Theroem 8.6) qui fournit une preuve détaillée de ces faits en plus de fournir d'autres critères. ✿

La condition (iv) permet de démontrer alors qu'une catégorie abélienne vérifiant AB5 vérifie alors AB4 (voir [Pop73], Corolloary 8.9). Évidemment, par passage à la catégorie duale, on en déduit un énoncé similaire pour l'axiome AB5*. Néanmoins, la seule catégorie abélienne qui vérifie à la fois l'axiome AB5 et l'axiome AB5* est la catégorie nulle ne contenant que 0 comme objet. Popescu en fait aussi la démonstration (Corollary 8.10). Ainsi, dans le meilleur des cas, les catégories abéliennes non nulles vérifieront au plus AB5 et AB4* (ou dualement AB5* et AB4). C'est le cas de **Ab** qui vérifie même un axiome encore plus fort.

Définition 2.1.13. Une catégorie abélienne vérifie l'axiome AB6 si elle vérifie AB3, AB3* et pour tout objet X et toute famille $\{X^j\}_{j \in J}$ d'ensembles filtrants $\{X_i^j\}_{i \in I_j}$ de sous-objets de X, on a :

$$\sum_{(i_j) \in \prod I_j} \left(\bigcap_{j \in J} X_{i_j}^j \right) = \bigcap_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} X_i^j \right)$$

On voit que cet axiome est plus fort que AB5 puisque la condition (iv) est le cas particulier où $J = \{1, 2\}$ et I_2 est un singleton.

Proposition 2.1.14. *La catégorie* **Ab** *des groupes abéliens vérifie les axiomes AB6 et AB4*.*

Démonstration. Commençons par montrer que **Ab** vérifie AB4*. On sait que les produits quelconques existent dans **Ab**. Soit $\{f_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ une collection d'épimorphismes de groupes abéliens. L'application sous-jacente à f_i est alors surjective. Soit $(b_i) \in \prod B_i$. Il existe pour tout i, un élément $a_i \in A_i$ tel que $f_i(a_i) = b_i$. Donc, si on pose $f := \prod f_i : \prod A_i \to \prod B_i$, on a $f((a_i)_{i\in I}) = (b_i)_{i\in I}$. Cela prouve que f est surjective, donc un épimorphisme et les produits de **Ab** sont exacts.

Montrons maintenant AB6. Les sommes quelconques existent aussi dans **Ab** en posant $\bigoplus A_i$ le sous-groupe de $\prod A_i$ contenant les suites à supports finie. Soit A un groupe abélien et J un ensemble. Pour tout indice $j \in J$, on considère un ensemble $\{A^j_i\}_{i\in I_j}$ de sous-groupes de A filtrant à droite. Soit $a \in \sum_{(i_j)_j} \bigcap A^j_{i_j}$. Il existe alors $i^1, \dots, i^n \in \prod_j I_j$ et $a_{i^1}, \dots, a_{i^n} \in A$ tels que $a = a_{i^1} + \cdots + a_{i^n}$ et pour tout $j \in J$, $a_{i^k} \in A^j_{i^k_j}$. En particulier, on a pour tout $j \in J$, $a_{i^k} \in \sum_{I_j} A^j_i$, donc $a_{i^k} \in \bigcap_j \sum_{I_j} A^j_i$ et donc a aussi ce qui prouve l'inclusion directe.

Pour l'inclusion réciproque, on considère $a \in \bigcap_j \sum_i A^j_i$. C'est-à-dire que pour tout $j \in J$, il existe $a^j_{i_1}, \dots, a^j_{i_{n_j}} \in A$ tels que $a = a^j_{i_1} + \cdots + a^j_{i_{n_j}}$ et $a^j_{i_k} \in A^j_{i_k}$. Comme, pour tout $j \in J$, l'ensemble $\{A^j_i\}$ est filtrant à droite, il existe un indice $l_j \in I_j$ tel que $A^j_{i_1}, \dots, A_{i_{n_j}} \subset A^j_{l_j}$. En particulier, pour tout $j \in J$, on a $a \in A^j_{l_j}$ et donc $a \in \bigcap_j A^j_{l_j} \subset \sum_{(i_j)_j} \bigcap_j A^j_{i_j}$. ✿

Remarque. En passant au dual, la catégorie $\mathbf{Ab}^{\mathbf{op}}$ vérifie AB6* et AB4. Cette catégorie est en fait connue par la dualité de Pontryagin qui implique en particulier que $\mathbf{Ab}^{\mathbf{op}}$ est équivalente à la catégorie des groupes abéliens compacts.

2.2 Groupe abélien condensé et générateur

On vient de voir que **Ab** est une catégorie abélienne qui vérifie le plus d'axiomes de Grothendieck possible. Or, de la même façon que lorsqu'un ensemble A possède une structure algébrique, $\mathrm{Hom}(X, A)$ hérite de la même structure en définissant les opérations de manière ponctuelle ; on peut définir, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, une structure de catégorie abélienne sur la catégorie de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ (catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ab}$).

Proposition 2.2.1. *Soit $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ deux catégories et $[\mathcal{C} : \mathcal{A}]$ la catégorie de foncteurs entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$. Soit $D : \mathbf{I} \to [\mathcal{C} : \mathcal{A}]$ un diagramme de $[\mathcal{C} : \mathcal{A}]$. Si pour tout $X \in \mathcal{C}$, le foncteur $ev_X \circ D : \mathbf{I} \to \mathcal{A}$ (où $ev_X : [\mathcal{C} : \mathcal{A}] \to \mathcal{A}$ envoie $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}(X)$) admet une limite (*resp. *une colimite) alors D admet une limite (*resp. *une colimite) et*

$$(\lim D)(X) = \lim ev_X \circ D$$

$$(\text{resp. } (\operatorname{colim} D)(X) = \operatorname{colim} ev_X \circ D)\,.$$

Démonstration. Le résultat provient du fait qu'une transformation naturelle γ entre deux éléments $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in [\mathcal{C} : \mathcal{A}]$ est une collection de données ponctuelles $\gamma_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$. Une preuve formelle est donnée dans [nLa23c]. ✿

Corollaire 2.2.2. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes ABi et ABj*, alors $[\mathcal{C}^{\mathbf{op}} : \mathcal{A}]$ en est une aussi. En particulier, $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} := [\mathcal{C}^{\mathbf{op}} : \mathbf{Ab}]$ est une catégorie abélienne vérifiant AB6 et AB4*.*

En d'autres termes, si on pose $\mathcal{F}_i = D(i)$, on a $(\lim \mathcal{F}_i)(X) = \lim \mathcal{F}_i(X)$ et $(\operatorname{colim} \mathcal{F}_i)(X) = \operatorname{colim} \mathcal{F}_i(X)$. Par exemple, les noyaux et conoyaux de transformations naturelles sont calculés de manière ponctuelle : $\mathrm{Ker}(\gamma)(X) = \mathrm{Ker}(\gamma_X)$ et $\mathrm{coKer}(\gamma)(X) = \mathrm{coKer}(\gamma_X)$. Pour les faisceaux sur un petit site $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$, on a pour rappel (proposition 1.2.8) la paire d'adjonctions $L \dashv U$ où $U : \widetilde{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ est le foncteur d'oubli. Or, de manière générale les adjoints à droite commutent avec les limites et ceux à gauche commutent avec les colimites (une preuve élégante de ce fait est donnée dans [nLa23a]). Ainsi, on peut toujours donner une structure de catégorie abélienne à $\widetilde{C}_{\mathbf{Ab}}$ en faisceautisant au besoin : le noyau d'une transformation naturelle est déjà un faisceau tandis qu'il faut faisceautiser son conoyau par exemple.

Proposition 2.2.3. *Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ un petit site. La catégorie de faisceaux de groupes abéliens $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ est une catégorie abélienne vérifiant AB5 et AB3*.*

Démonstration. Nous n'utiliseront pas ce résultat mais une démonstration peut être trouvée dans [AGV] (exposé II proposition 6.7) où Verdier met aussi en lumière le fait qu'on peut définir $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ comme les objets groupes abéliens de $\widetilde{\mathcal{C}}$. ✿

Ainsi, on en déduirait que $\mathrm{Cond}(\mathbf{Ab}) = \widetilde{\mathbf{Stone}}_{\mathbf{Ab}}$ est une catégorie abélienne qui vérifie AB5 et AB3* (modulo les questions habituelles de cardinalité). Mais la situation est en fait bien meilleure car il n'y pas vraiment besoin de faisceautiser les colimites ici.

Proposition 2.2.4. *Si $i \mapsto A_i$ est un diagramme de groupes abéliens condensés, alors pour tout $S \in \mathbf{ED}$, on a*

$$(\mathrm{colim}_i\, A_i)(S) = \mathrm{colim}_i\, A_i(S).$$

Démonstration. D'après le théorème 1.3.5, on a $(\mathrm{colim}_i\, A_i)_{|\mathbf{ED}} = \mathrm{colim}_i\, A_{i|\mathbf{ED}}$. Ainsi, il suffit de montrer que la colimites des préfaisceaux $A_{i|\mathbf{ED}}$ est un faisceau sur $\mathbf{ED}$. D'après la proposition 1.2.9, il s'agit de démontrer que $\mathrm{colim}\, A_i$ transforme les coproduits finis de $\mathbf{ED}$ en produits finis de $\mathbf{Ab}$.

Pour le vide, on a $\mathrm{colim}_i\, A_i(\emptyset) = \mathrm{colim}_i\, 0 = 0$. Pour les coproduits non vides, on a pour tous $S_1, S_2 \in \mathbf{ED}$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{colim}_i\, A_i)\,(S_1 \sqcup S_2) &= \mathrm{colim}_i\, A_i\,(S_1 \sqcup S_2) \\
&= \mathrm{colim}_i\,(A_i(S_1) \times A_i(S_2)) \\
&= \mathrm{colim}_i\,(A_i(S_1) \oplus A_i(S_2)) \\
&= (\mathrm{colim}_i\, A_i(S_1)) \oplus (\mathrm{colim}_i\, A_i(S_2)) \\
&= (\mathrm{colim}_i\, A_i)(S_1) \times (\mathrm{colim}_i\, A_i)(S_2).
\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité provient du fait que les colimites préservent les sommes et plus généralement, les colimites préservent les colimites. Ceci est vrai puisque le foncteur de colimites $\mathrm{colim} : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ est par définition adjoint à gauche du foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ et pour rappel, les adjoints à gauche préservent les colimites [nLa23a]. ✿

Ainsi, $\mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$ hérite de la structure de $\widehat{\mathbf{ED}}_{\mathbf{Ab}}$ qui, d'après le corollaire 2.2.2, est une catégorie abélienne vérifiant AB6 et AB4*. On en déduit alors le théorème suivant.

Théorème 2.2.5. *La catégorie* Cond(**Ab**) *des groupes abéliens condensés et une catégorie abélienne vérifiant les axiomes de Grothendieck suivants :*

(AB3) Les produits quelconques existent.*

(AB4) Les produit sont exacts.*

(AB3) Les sommes directes quelconques existent.

(AB4) Les sommes directes sont exactes.

(AB5) Les colimites filtrantes sont exactes.

(AB6) Pour tout groupe abélien condensé X et toute famille $\{X^j\}$ d'ensembles filtrant à droite $\{X_i^j\}$ de sous-groupes abéliens condensés, on a

$$\sum_{(i_j)\in\prod I_j}\left(\bigcap_{j\in J} X_{i_j}^j\right) = \bigcap_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} X_i^j\right).$$

L'autre résultat important sur la catégorie Cond(**Ab**) porte sur ses générateurs.

Définition 2.2.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un ensemble d'objets $\{G_i\}$ de $\mathcal{C}$ est un *ensemble de générateurs* si, pour tout couple de morphismes distincts $f, g : X \to Y$, il existe un morphisme $h : G_i \to X$ tel que $f \circ h \neq g \circ h$.

Dans le cas d'une catégorie pré-additive $\mathcal{A}$, on voit facilement qu'un ensemble $\{G_i\}$ d'objets de $\mathcal{A}$ est générateur si et seulement si pour tout morphisme non nul $f : X \to Y$, il existe un morphisme $h : G_i \to X$ tel que $f \circ h \neq 0$.

Proposition 2.2.7. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne vérifiant AB3 et $\{G_i\}$ un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$. On pose $G := \bigoplus G_i$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\{G_i\}$ est un ensemble de générateurs.

(ii) G est un générateur.

(iii) Pour tout objet X, il existe un ensemble A et un épimorphisme $\bigoplus_{a\in A} G =: G^{(A)} \to X$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $f : X \to Y$ un morphisme non nul. Il existe $h : G_{i_0} \to X$ tel que $f \circ h \neq 0$. On pose alors $\overline{h} : \bigoplus G_i \to X$ tel que $\overline{h} \circ J_i = \begin{cases} h \text{ si } i = i_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (où $J_i : G_i \to \bigoplus G_i$ est l'inclusion canonique). On a alors $f \circ \overline{h} \neq 0$ puisque $f \circ \overline{h} \circ J_{i_0} = f \circ h \neq 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $X \in \mathcal{A}$. Posons $A = \mathrm{Hom}(G, X)$. Soit $h \in \mathrm{Hom}(G, X)$. On note $J_h : G \to G^{(A)}$ l'inclusion canonique associée. On pose $p : G^{(A)} \to X$ tel que pour tout $h \in \mathrm{Hom}(G, A)$, on ait $p \circ J_h = h$. Notons $q : X \to \mathrm{coKer}\, p$ son conoyau. Par l'absurde, si $q \neq 0$, comme G est générateur, il existe $h : G \to X$ tel que $q \circ h \neq 0$. Or, $q \circ h = q \circ p \circ J_h = 0$ et on obtient une contradiction. Donc, $q = 0$ et $\mathrm{coKer}\, p = 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $f : X \to Y$ un morphisme non nul et $p : G^{(A)} \to X$ un épimorphisme. On a alors $0 \neq f \circ p : G^{(A)} \to Y$ et donc il existe $a \in A$ tel que $0 \neq f \circ p \circ J_a : G \to Y$. Or, $G = \bigoplus G_i$ donc il existe i tel que $0 \neq f \circ p \circ J_a \circ J_i : G_i \to Y$. ✿

Définition 2.2.8. Une *catégorie de Grothendieck* est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome AB5 et possédant un générateur.

La proposition précédente montre donc que pour qu'une catégorie abélienne vérifiant AB5 soit une catégorie de Grothendieck, il suffit de montrer qu'elle possède un ensemble de générateurs. C'est le cas de Cond($\mathbf{Ab}$) qui possède des générateurs particuliers dans le sens où ils sont projectifs et compacts. On a déjà parlé d'objets projectifs auparavant mais rappelons en la définition.

Définition 2.2.9. Un objet P est *projectif* (*resp. compact*) si $\mathrm{Hom}(P, -)$ préserve les épimorphismes (*resp.* les colimites filtrantes).

Lemme 2.2.10. *Soit $\mathcal{C}$ un site et $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ sa catégorie de faisceaux de groupes abéliens. Le foncteur d'oubli $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ admet pour adjoint à gauche le foncteur $X \mapsto \mathbb{Z}[X]$ où $\mathbb{Z}[X]$ est la faisceautisation du foncteur qui à $K \in \mathcal{C}$ associe le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[X(K)]$.*

Démonstration. On sait que le foncteur d'oubli $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ens}$ admet $\mathbb{Z}[\cdot] : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$ comme adjoint à gauche. Ce foncteur induit un foncteur $F : \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ qui est l'unique foncteur faisant commuter le diagramme suivant pour tout $K \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{C}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "ev_K"'] & \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \arrow[d, "ev_K"] \\ \mathbf{Ens} \arrow[r, "\mathbb{Z}[\cdot]"'] & \mathbf{Ab} \end{tikzcd}$$

Dès lors, comme une transformation naturelle $\gamma \in \mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}:\mathcal{D}]}(X, Y)$ est en fait une collection de morphismes $\gamma_K \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X(K), Y(K))$, on a pour tout $X \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $A \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(F(X), A) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, A)$$

En effet, pour tout $K \in \mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F(X)(K), A(K)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}[X(K)], A(K)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X(K), A(K)).$$

On a alors défini le foncteur groupe abélien condensé libre comme étant le foncteur qui fait commuter le diagramme suivant avec L le foncteur de faisceautisation :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}} \arrow[r, "\mathbb{Z}[\cdot]"] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \\ \widehat{\mathcal{C}} \arrow[r, "F"'] & \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \arrow[u, "L"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi, pour tout $X \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $A \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(\mathbb{Z}[X], A) &= \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(LF(X), A) \\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(F(X), A) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(X, A). \end{aligned}$$

✿

Remarque. Le foncteur de faisceautisation $L : \widehat{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ induit bien un foncteur $L : \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \to \widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$. En effet, pour un site quelconque $\mathcal{C}$, la catégorie $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ peut être aussi définie comme la catégorie des objets groupes abéliens de $\widetilde{\mathcal{C}}$ et tout foncteur préservant les produits finis préserve les objets groupes abéliens. Or, on a déjà parlé du fait que L était exact (remarque suivant la proposition 1.2.8).

Théorème 2.2.11. *La catégorie* Cond($\mathbf{Ab}$) *est une catégorie de Grothendieck dont les objets compacts projectifs sont générateurs.*

Démonstration. Soit S un espace extrêmement discontinu. On considère son groupe condensé libre associé $\mathbb{Z}[\underline{S}]$. Montrons que c'est un groupe abélien condensé compact et projectif. Soit A un groupe abélien condensé. Comme $\underline{S} = \widehat{S}$, par Yoneda on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}(\mathbf{Ens})}(\widehat{S}, A) = A(S)$$

Or, on sait que $ev_S : A \mapsto A(S)$ préserve les épimorphismes (une transformation naturelle γ est un épimorphisme si et seulement si tous les morphismes γ_S associés sont des épimorphismes) et plus généralement, comme S est extrêmement discontinu, ev_S préserve toutes les limites et colimites d'après la proposition 2.2.4 (la préservation des épimorphismes est en fait équivalente à la préservation des conoyaux dans une catégorie abélienne d'après la proposition 2.1.6).

Montrons maintenant que $\{\mathbb{Z}[\underline{S}]\}_{S\in\mathbf{ED}}$ est un ensemble de générateurs de $\mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$ (on remarquera ici l'importance de borner les éléments du site $\mathbf{ED}$). Soit $A \in \mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$. On désigne par $E_S := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\underline{S}], A)$ pour tout $S \in \mathbf{ED}$ et on pose

$$p : \bigoplus_{S\in\mathbf{ED}} \mathbb{Z}[\underline{S}]^{(E_S)} \to A$$

le morphisme induit par les morphismes des E_S (pour tout $f \in E_S$, $p \circ J_f = f$). Montrons que p est un épimorphisme en montrant que pour tout $S \in \mathbf{ED}$, le morphisme de groupes abéliens p_S est surjectif. Soit $\sigma \in A(S)$. On considère la transformation naturelle $\gamma : \underline{S} \to A$ associée. On a alors $\gamma_S(\mathrm{id}_S) = \sigma$. On considère, par adjonction, le morphisme associé $\overline{\gamma} \in E_S$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underline{S} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "u"'] & A \\
\mathbb{Z}[\underline{S}] \arrow[ur, "\overline{\gamma}"'] &
\end{tikzcd}$$

On a alors $(\overline{\gamma} \circ u)_S(\mathrm{id}_S) = \sigma$ et donc

$$p_S \circ (J_{\overline{\gamma}})_S \circ u_S(\mathrm{id}_S) = (\overline{\gamma} \circ u)_S(\mathrm{id}_S) = \sigma.$$

On sait maintenant que p est un épimorphisme et on souhaite utiliser la condition (iii) de la propriété 2.2.7. Pour cela, on pose $E = \bigsqcup_{S\in\mathbf{ED}} E_S$ et on étend naturellement p en

$$p' : \bigoplus_{S\in\mathbf{ED}} \mathbb{Z}[\underline{S}]^{(E)} \to A$$

avec pour tout $f \in E_{S'}$,

$$p' \circ J_{\mathbb{Z}[\underline{S}]_f} = \begin{cases} f \text{ si } S = S' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est alors aussi un épimorphisme. ✿

2.3 (Ir)régularités du passage aux groupes condensés

Une grande partie de cette section est inspirée de [Mar21].

Si on reprend notre foncteur $X \mapsto \underline{X}$, on peut l'appliquer à la catégorie des groupes abéliens topologiques pour définir des groupes abéliens condensés puisque pour tout groupe abélien topologique A et tout compact S, l'ensemble des applications continues $\underline{A}(S) = \mathrm{Hom}(S, A)$ est un sous-groupe du groupe produit A^S. Si $f : A \to B$ est un morphisme de groupes continu, alors $\underline{f}_S : \underline{A}(S) \to \underline{B}(S)$ est un morphisme de groupes et on a donc un foncteur $\mathbf{TopAb} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$ où $\mathbf{TopAb}$ est la catégorie des groupes abéliens topologiques (cela provient plus abstraitement du fait que $X \mapsto \underline{X}$ préserve les produits finis et donc induit un foncteur entre les objets groupes abéliens de $\mathbf{Top}$ et $\mathrm{Cond}(\mathbf{Ens})$). On peut faire en fait mieux dans le cas des groupes abéliens k-topologiques (*cf.* définition 3.2.7).

On peut maintenant voir l'un des intérêts des mathématiques condensées. Considérons les groupes abéliens $\mathbb{R}$ et $D\mathbb{R}$ (pour rappel, $D\mathbb{R}$ est le discrétisé de $\mathbb{R}$) ainsi que l'application identité

$$\mathrm{id} : D\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui est continue. On voit bien que cette application n'est pas un homéomorphisme mais on a pourtant $\operatorname{Ker}\mathrm{id} = 0$ et $\operatorname{coKer}\mathrm{id} = 0$. Bien que la structure algébrique de $\mathbb{R}$ soit compatible avec ces deux topologies, les outils algébriques habituels ne suffisent pas à capturer les informations topologiques de nos objets (ou autrement dit, **TopAb** n'est pas une catégorie abélienne). Du côté condensé, on considère l'application associée

$$\underline{\mathrm{id}} : \underline{D\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}.$$

On sait que $X \mapsto \underline{X}$ préserve les monomorphismes (car il préserve les limites) et donc $\operatorname{Ker}\underline{\mathrm{id}} = 0$. Néanmoins, pour tout espace de Stone S, on a

$$(\operatorname{coKer}\underline{\mathrm{id}})(S) = L\left(\frac{\operatorname{Hom}(\bullet, \mathbb{R})}{\{\bullet \to D\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}}\right)(S).$$

Or, si on considère $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ la compactification d'Alexandrov de $\mathbb{N}$ qui est un espace de Stone, on a

$$\frac{\operatorname{Hom}(\mathbb{N}\cup\{\infty\}, \mathbb{R})}{\{\mathbb{N}\cup\{\infty\} \to D\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}} = \frac{\{\text{suites convergentes}\}}{\{\text{suites stationnaires}\}} \neq 0.$$

Ainsi, on a prouvé que

$$Q := \frac{\operatorname{Hom}(\bullet, \mathbb{R})}{\{\bullet \to D\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}} \neq 0.$$

Malheureusement, cela ne suffit pas pour conclure que le faisceau LQ est non-nul. Mais, le fait est qu'ici Q est un faisceau sur **Stone** et donc $LQ_{|\mathbf{Stone}} = Q_{|\mathbf{Stone}} \neq 0$. Cela peut être facilement démontré en utilisant la cohomologie de faisceaux et le fait que $H^1(S, \underline{A}) = 0$ si S est un espace de Stone et A et un groupe abélien discret (tout cela est discuté dans une note de bas de page de [CS19a] page 9, il faut utiliser le théorème 3.2 dans [CS19b] qui permet de ramener la cohomologie condensée à la cohomologie de faisceaux ainsi que le résultat 20.22.3 du stacks project [Sta23]). Ainsi, on a bien $\operatorname{coKer}\underline{\mathrm{id}} = LQ \neq 0$. Par ailleurs, on retrouve la situation du point de vue topologique (*cf.* section 1.4) puisqu'on a alors $(\operatorname{coKer}\underline{\mathrm{id}})(*) = 0$.

Pour résumer, en notant naturellement, $\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}} := \operatorname{coKer}\underline{\mathrm{id}}$, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{D\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

tandis que du point de vue topologique, la suite exacte ressemble à cela :

$$0 \longrightarrow D\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Étudions de plus près les propriétés du foncteur $\mathbf{TopAb} \to \operatorname{Cond}(\mathbf{Ab})$. On l'a vu précédemment, il conserve toujours les monomorphismes. On a aussi toujours le résultat suivant.

Proposition 2.3.1. *Le foncteur* $\mathbf{TopAb} \to \operatorname{Cond}(\mathbf{Ab})$ *qui à A associe $\underline{A}$, conserve les limites :*

$$\underline{\lim A_i} = \lim \underline{A_i}$$

Démonstration. On sait que les limites de groupes abéliens condensés se calculent ponctuellement. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout espace de Stone S, on a un isomorphisme naturel de groupes abéliens :

$$\varphi : \operatorname{Hom}(S, \lim A_i) \to \lim \operatorname{Hom}(S, A_i)$$

Il est connu qu'une bijection naturelle existe entre les ensembles sous-jacents à ces groupes, montrons que c'est un morphisme de groupes. Si l'on explicite φ, on a pour toute application continue f :

$$\varphi(f) = (p_i \circ f)_i$$

avec $p_i : \lim A_i \to A_i$ la i-ème projection canonique de la limite. La composition étant bilinéaire, on voit facilement que φ est un morphisme de groupes. ✿

Remarques.

- Le résultat est évidemment aussi vrai pour le foncteur $\mathbf{Top} \to \operatorname{Cond}(\mathbf{Ens})$.
- La catégorie **TopAb** admet bien toutes les limites : un produit de groupes topologiques est un groupe topologique lorsque l'on munit le produit de la topologie produit.

Cette dernière remarque est importante car on est généralement moins à l'aise avec les colimites. On sait que **TopAb** admet bien toutes les sommes (il faut poser une topologie très particulière sur la somme directe de groupes *cf.* [Hig77]) et comme elle admet tous les conoyaux (un quotient de groupe topologique muni de la topologie quotient est un groupe topologique), elle admet aussi toutes les colimites.

Proposition 2.3.2. *Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble de groupes abéliens discrets. On munit leur somme $\bigoplus A_i$ de la topologie discrète. On a alors :*

$$\underline{\bigoplus A_i} = \bigoplus \underline{A_i}$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a le diagramme suivant pour tout $S \in \mathbf{ED}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(S, \bigoplus A_i) \arrow[d, hook] & \bigoplus \mathrm{Hom}(S, A_i) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Hom}\,(S, \prod A_i) \arrow[r, "\sim"'] & \prod \mathrm{Hom}(S, A_i)
\end{tikzcd}$$

Montrons que l'on peut le faire commuter. Soit $h : S \to \bigoplus A_i$ une application continue. On veut alors montrer que $(h_i)_{i\in I} \in \bigoplus \mathrm{Hom}(S, A_i)$ avec $h_i = p_i \circ h : S \to A_i$ la i-ème composante de h. On sait que $h(S)$ est compact et discret car $\bigoplus A_i$ est discrète et donc $h(S)$ est fini :

$$h(S) = \{a^1, \dots, a^n\}$$

On pose $\mathcal{S}(a^k) = \{i \in I \,|\, p_i(a^k) \neq 0\}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Ces ensembles sont finis car $a^k \in \bigoplus A_i$ pour tout k. Ainsi,

$$\{i \in I \,|\, p_i \circ h \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{S}(a^k)$$

est fini et $(h_i)_{i\in I} \in \bigoplus \mathrm{Hom}(S, A_i)$.

Ainsi, on peut faire commuter le diagramme précédent :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(S, \bigoplus A_i) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \bigoplus \mathrm{Hom}(S, A_i) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Hom}\,(S, \prod A_i) \arrow[r, "\sim"'] & \prod \mathrm{Hom}(S, A_i)
\end{tikzcd}$$

Montrons que la flèche horizontale du haut est surjective. On se donne des applications continues $h_i : S \to A_i$ avec seulement un nombre fini d'entre elles qui soient non nulles. On note $h : S \to \prod A_i$ l'application induite. On a pour tout $x \in S$, $\mathcal{S}(h(x)) \subset \mathcal{S}(h)$ où $\mathcal{S}(h)$ désigne l'ensemble des indices i tels que $h_i \neq 0$. Ce dernier est fini et donc $h(x) \in \bigoplus A_i$.

Reste à montrer que l'application $h : S \to \bigoplus A_i$ est continue. Soit $x \in S$. On a $h(x) = a_{i_1} + \dots + a_{i_n}$ avec $a_{i_k} = h_{i_k}(x) \in A_{i_k}$. Comme $h_{i_k} : S \to A_{i_k}$ est continue, on sait qu'il existe un voisinage $V_{i_k} \subset S$ de x tel que $h_{i_k}(V_{i_k}) = \{a_{i_k}\}$. On pose alors

$$V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{i_k}$$

qui est un voisinage de x et on a $h(V) = \{h(x)\}$. ✿

On a vu au début de cette section que le foncteur $A \mapsto \underline{A}$ n'est pas exact mais il l'est en fait dans certaines situations.

Proposition 2.3.3. *Soit* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de groupes abéliens topologiques avec* C *séparé. On suppose que* $f^{-1} : \operatorname{Im} f \to A$ *est continue et que pour tout compact* $K \subset C$*, il existe un compact* $K' \subset B$ *tel que* $g(K') \supset K$*. Alors la suite induite*

$$0 \longrightarrow \underline{A} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{B} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{C} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Le fait que $\underline{f}$ soit un monomorphisme est évident. Ensuite, on a par fonctorialité $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{g \circ f} = 0$. Montrons que $\operatorname{Ker} \underline{g} \subset \operatorname{Im} \underline{f}$. Soit $S \in \mathbf{ED}$ et $h : S \to B$ une application continue telle que $g \circ h = 0$. On a alors $h(S) \subset \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ et donc $h = f \circ f^{-1} \circ h \in \operatorname{Im} \underline{f}_S$ car f^{-1} est continue. Ainsi, $\operatorname{Ker} \underline{g}_S \subset \operatorname{Im} \underline{f}_S$ pour tout $S \in \mathbf{ED}$.

Montrons maintenant que $\underline{g}$ est un épimorphisme. Soit $S \in \mathbf{ED}$ et $h : S \to C$ une application continue. Comme C est séparé, $h(S)$ est compact et donc, par hypothèses, il existe $K' \subset B$ compact tel que $h(S) \subset g(K')$. De plus, $g(K')$ est alors compact et comme $S \in \mathbf{ED}$, S est un compact projectif. Ainsi, on peut relever h de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[d, "g"] \\ S \arrow[ur, dotted, "h'"] \arrow[r, "h"'] & g(K') \end{tikzcd}$$

Cela prouve que $h \in \operatorname{Im} \underline{g}_S$ et donc $\underline{g}_S$ est surjective. ✿

3 Structure monoïdale symétrique fermée

La notion de catégorie monoïdale permet de formaliser catégoriquement la notion de produit tensoriel. On sait effectuer des produits tensoriels de modules mais ceux-ci ne se comportent pas forcément bien lorsque l'on travaille avec des modules topologiques. Par exemple, si E et F sont deux espaces de Banach, il y a plusieurs façons de normer $E \otimes F$ et donc de le compléter en un espace de Banach. Du côté condensé, une théorie générale de complétion existe grâce à la notion d'espaces vectoriels liquides.

Nous ne développerons ici seulement que les base théoriques pour définir un produit tensoriel sur $\mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$ ainsi qu'un foncteur hom interne *cf.* définition 3.1.4.

3.1 Catégorie monoïdale symétrique fermée

Définition 3.1.1. Une *catégorie monoïdale* est une catégorie $\mathcal{C}$ muni d'un foncteur *produit tensoriel*

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C},$$

d'un objet *unité* $1 \in \mathcal{C}$ et d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} &\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \\ &\gamma_X : 1 \otimes X \to X, \\ &\delta_X : X \otimes 1 \to X \end{aligned}$$

vérifiant les deux identités suivantes :
<u>Identité du pentagone :</u>

$$\begin{tikzcd} & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[drr, "\alpha_{X,Y,Z\otimes T}"] & & \\ ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \arrow[urr, "\alpha_{X\otimes Y,Z,T}"] \arrow[dr, "\alpha_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_T"'] & & & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \\ & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[rr, "\alpha_{X,Y\otimes Z,T}"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,T}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Identité du triangle :</u>

$$\begin{tikzcd} (X \otimes 1) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,1,Y}"] \arrow[dr, "\delta_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & & X \otimes (1 \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X \otimes \gamma_Y"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd}$$

Toutes les catégories monoïdales auxquelles nous allons nous intéresser auront une particularité supplémentaire.

Définition 3.1.2. Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est dite *symétrique* s'il existe un isomorphisme naturel

$$S_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

vérifiant :

1) $S_{X,Y}^{-1} = S_{Y,X}$
2) $\delta_X = \gamma_X \circ S_{X,1}$
3) Identité de l'hexagone :

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "S_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z"'] \arrow[dr, "\alpha_{X,Y,Z}"] & \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "\alpha_{Y,X,Z}"'] & & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "S_{X,Y\otimes Z}"] \\
Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[dr, "\mathrm{id}_Y \otimes S_{X,Z}"'] & & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dl, "\alpha_{Y,Z,X}"] \\
 & Y \otimes (Z \otimes X) &
\end{tikzcd}$$

Remarques.

— L'axiome 2) énonce que l'on peut définir le foncteur « neutre à gauche » par le « neutre à droite » et donc que seul l'un des deux nécessite d'être défini dans le cas symétrique.

— Si l'axiome 1) n'est pas vérifié, on dit que la catégorie est *tressée* et il faut énoncer une deuxième identité de l'hexagone.

De nombreuses catégories peuvent être munies d'une structure monoïdale symétrique. Par exemple, si elle admettent tous les produit finis.

Définition 3.1.3. Une catégorie est dite *cartésienne* si elle admet tous les produit finis (et donc un objet final). De manière duale, elle est dite *cocartésienne* si elle admet toutes les sommes finies (et donc un objet initial).

Une catégorie cartésienne est alors monoïdale symétrique lorsque l'on définit le produit tensoriel comme le produit $\times$ et l'unité comme l'objet final $*$. La vérification des différentes identités est une formalité et le lecteur pourra s'y essayer si cela lui chante. On peut faire de même pour les catégories cocartésiennes et les amatrices d'abstract nonsense pourront démontrer plus généralement que la catégorie duale à une catégorie monoïdale (symétrique) est monoïdale (symétrique).

Exemples. Les exemples de catégories cartésiennes qui nous intéresseront seront **Ens**, **Top**, la catégorie **CG** des espaces compactement engendrés, $\widetilde{\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C}$ est un site quelconque et donc en particulier Cond(**Ens**).

Dans **Ens**, on connaît la fameuse bijection naturelle de curryfication :

$$X^{Y \times Z} \xrightarrow{\sim} (X^Y)^Z$$

avec $X^Y := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, X)$. Cette bijection naturelle représente en fait une adjonction puisqu'on a alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y \times Z, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Z, X^Y)$. On dit alors que **Ens** est *fermée*.

Définition 3.1.4. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ une catégorie monoïdale symétrique. On dit que cette catégorie est *fermée* si pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, le foncteur $- \otimes Y$ admet un adjoint à droite $[Y, -]$:

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}(X, [Y, Z])$$

Le foncteur $[-,-] : \mathcal{C}^{\mathbf{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est appelé le foncteur *hom interne*.

Remarques.

— Le fait que la catégorie soit symétrique est important pour définir le bifoncteur $[-,-]$. Pour plus de détails, voir [Bor94] proposition 6.1.7.

— Dans le cas d'une catégorie cartésienne fermée, on note souvent $Y^X := [X, Y]$ puisque c'est en fait un objet exponentiel.

On a déjà vu que **Ens** est cartésienne fermée. Pour **CG**, voir section 3.2 et pour $\widetilde{\mathcal{C}}$, voir section 3.3. Quant à **Top**, il est possible de montrer qu'elle n'est pas cartésienne fermée (*cf.* [Bor94] proposition 7.1.2). Elle peut cependant être munie d'une structure monoïdale fermée avec un produit tensoriel qui n'est pas le produit cartésien (*cf.* [Bor94] exemple 6.1.9.g).

3.2 Exemples concrets

Un exemple de catégorie monoïdale dont le produit tensoriel n'est pas défini par un produit (on pourrait parler de catégories monoïdales non cartésiennes bien que ces catégorie puissent être cartésiennes) est la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des A-modules avec A un anneau commutatif unitaire. Le produit tensoriel $M \otimes_A N$ peut être défini comme le plus gros quotient de $A^{(M \times N)}$ qui rend l'application canonique

$$\otimes : M \times N \to A^{(M \times N)} \to M \otimes_A N$$

bilinéaire. Ce produit tensoriel est en fait défini par la propriété universelle suivante :

Pour tous A-modules M, N et L et toute application bilinéaire $b : M \times N \to L$ il existe une unique application linéaire $l : M \otimes_A N \to L$ tel que pour tout $(m, n) \in M \times N$, on ait $l(m \otimes n) = b(m, n)$.

Cette propriété universelle énonce en fait que l'on a la bijection naturelle suivante :

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L))$$

En effet, on munit $\mathrm{Hom}_A(N, L)$ de sa structure de module évidente, la propriété universelle énonce une bijection naturelle $\mathrm{Bil}_A(M \times N, L) \simeq \mathrm{Hom}_A(M \otimes N, L)$ et il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe une bijection naturelle $\mathrm{Bil}_A(M \times N, L) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L))$. Ainsi on en déduit le résultat suivant puisque $\mathbf{Ab} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$.

Proposition 3.2.1. *$(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ est une catégorie monoïdale symétrique fermée.*

Démonstration. Soit A, B et C des groupes abéliens. Il existe un unique isomorphisme de groupes $(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \otimes_{\mathbb{Z}} C \to A \otimes_{\mathbb{Z}} (B \otimes_{\mathbb{Z}} C)$ qui envoie $(a \otimes b) \otimes c$ sur $a \otimes (b \otimes c)$. Il existe aussi un unique isomorphisme $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to B \otimes_{\mathbb{Z}} A$ qui envoie $a \otimes b$ sur $b \otimes a$. Enfin, il existe un unique isomorphisme $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to A$ qui envoie $a \otimes n$ sur $n \cdot a$. Ces isomorphismes sont alors naturels et leur unicité permet de vérifier les identités des catégories monoïdales symétriques.

Pour le caractère fermé, il faut poser $[A, B] := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ et l'adjonction avec le produit tensoriel a été discutée précédemment. ✿

Quittons l'algèbre maintenant pour revenir à la topologie. À partir d'ici, afin d'éviter le surplus de « Hom », nous noterons $C(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ et $C_{\mathbb{Z}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{TopAb}}(A, B)$. On va s'intéresser ici à la catégorie **CG** des espaces compactement engendrés. La définition d'espace compactement engendré que nous utilisons ici est pour rappel la définition 1.4.1. Dans ce cadre, on a défini la k-ification kX d'un espace topologique X comme l'ensemble X munit d'une topologie plus fine. La k-ification est en fait un foncteur $k : \mathbf{Top} \to \mathbf{CG}$. C'est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.2.2. *Si X est un espace compactement engendré, alors pour tout $Y \in \mathbf{Top}$, on a*

$$C(X,Y) = C(X,kY).$$

Démonstration. Comme la topologie de kY raffine celle de Y, on a $C(X,Y) \supset C(X,kY)$. Vérifions l'inclusion réciproque. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Comme $X \in \mathbf{CG}$, pour montrer que $kf : X \to kY$ est continue, il suffit de vérifier que pour toute application teste $t : K \to X$ (continue avec K compact), on a $kf \circ t \in C(K,kY)$. Or, on a déjà discuté après la definition 1.4.1 du fait que $C(K,kY) = C(K,Y)$ et ici, l'application induite par $t \circ kf : K \to kY$ est $t \circ f : K \to Y$ qui est continue. Ainsi, $t \circ kf$ est continue et ceci pour tout $t \in C(K,X)$ et tout compact K. Donc, $kf : X \to kY$ est continue. ✿

Cela montre que k est un foncteur puisque pour une application continue $f : X \to Y$, la même application $kf : kX \to kY$ entre les espaces k-ifiés est aussi continue : $C(X,Y) \subset C(kX,Y) = C(kX,kY)$. Le lemme précédent énonce en fait la chose suivante :

Corollaire 3.2.3. *La k-ification $\mathbf{Top} \to \mathbf{CG}$ est un foncteur adjoint à droite au foncteur d'oubli $\mathbf{CG} \to \mathbf{Top}$.*

Ce résultat montre alors que $\mathbf{CG}$ est cartésienne en posant pour deux espaces $X, Y \in \mathbf{CG}$, le produit $X \times_k Y := k(X \times Y)$ (les adjoints à droite préservent les limites). Elle est en fait fermée. Pour le comprendre, on peut lire la section 5.9 de [Bro06] ainsi que la section 4 de [nLa23b].

Pour montrer que $\mathbf{CG}$ est fermée, on considère la catégorie $\mathbf{Top}_k$ dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont définis par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X,Y) := C(kX,Y)$$

On appelle un élément $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X,Y)$ un k-morphisme entre X et Y. Un tel k-morphisme est plus explicitement une application $f : X \to Y$ qui est telle que pour toute application teste $t : K \to X$, l'application $f \circ t : K \to Y$ est continue. Une application continue est un k-morphisme (et la réciproque est vraie si X est compactement engendré). Ainsi, on a un foncteur $\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_k$ qui permet d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.2.4. *La composition de foncteurs $\mathbf{CG} \longrightarrow \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}_k$ est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Montrons que le foncteur $\mathbf{CG} \to \mathbf{Top}_k$ est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. Soit $X, Y \in \mathbf{CG}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X,Y) = C(kX,Y) = C(X,Y),$$

ce qui prouve la pleine fidélité. Soit $X \in \mathbf{Top}_k$. Montrons l'essentielle surjectivité. On sait que l'application identité $kX \to X$ est continue (et donc un k-morphisme). Si X n'est pas compactement engendré, on sait que l'application identité réciproque $X \to kX$ n'est pas continue. Néanmoins, il s'agit toujours d'un k-morphisme puisque $\mathrm{id}_{kX} : kX \to kX$ est continue. Ainsi, dans $\mathbf{Top}_k$, l'identité induit un isomorphisme $X \simeq kX$. ✿

Ainsi, $\mathbf{Top}_k$ est cartésienne (on peut définir le produit par $X \times Y$ ou $X \times_k Y$, cela n'a pas d'importance puisque ces deux espaces sont isomorphes dans $\mathbf{Top}_k$). Et, le fait est que cette catégorie est fermée. Pour montrer cela, on définit le hom interne de $\mathbf{Top}_k$ par

$$C_k(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X,Y) = C(kX,Y)$$

muni de la topologie *teste-ouverte*. Pour décrire cette topologie, on définit, pour toute application teste $t : K \to X$ et pour tout ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $V(t,U) \subset C(kX,Y)$ comme l'ensemble des éléments f tels que $f(t(K)) \subset U$. La topologie teste-ouverte est alors la topologie engendrée par $\{V(t,U)\}_{K\in\mathbf{Comp},\ t\in C(K,X),\ U\subset Y \text{ ouvert}}$. On peut remarquer que si X est séparé, alors cette topologie coïncide avec la topologie *compacte-ouverte* que l'on pose sur l'ensemble $C_k(X,Y) \supset C(X,Y)$.

Cela définit alors bien un foncteur $Y \mapsto C_k(X,Y)$ puisque si on se donne un k-morphisme $f : Y_1 \to Y_2$, alors l'application $f\circ - : C_k(X,Y_1) \to C_k(X,Y_2)$ est un k-morphisme. En effet, l'application $f' : kY_1 \to Y_2$ est continue et on a pour toute application teste $t : K \to X$ et tout ouvert $U \subset Y_2$:

$$(f'\circ -)^{-1}(V(t,U)) = V(t, f'^{-1}(U)) \subset C_k(X,kY_1).$$

Cela prouve que $f'\circ - : C_k(X,kY_1) \to C_k(X,Y_2)$ est continue. Or, on peut montrer que dans $\mathbf{Top}_k$, on a un isomorphisme

$$C_k(X,kY_1) \simeq C_k(X,Y_1)$$

et donc $f\circ -$ est un k-morphisme. Cet isomorphisme est en fait une conséquence de l'adjonction suivante.

Théorème 3.2.5. *La catégorie $\mathbf{Top}_k$ est cartésienne fermée. Plus précisément, l'application de curryfication habituelle induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X\times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X, C_k(Y,Z)).$$

Démonstration. La preuve est un peu longue et est très bien écrite dans [Bro06] proposition 5.9.8. ✿

Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X, C_k(Y,Z)) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X\times Y, Z)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X\times Y, kZ) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_k}(X, C_k(Y,kZ))\end{aligned}$$

ce qui prouve que $C_k(Y,Z) \simeq C_k(Y,kZ)$ dans $\mathbf{Top}_k$.

Corollaire 3.2.6. *Si X et Y sont compactement engendrés et si X ou Y est compact, alors l'application de curryfication induit une bijection*

$$C(X\times Y, Z) \xrightarrow{\sim} C(X, C(Y,Z))$$

où $C(Y,Z)$ est muni de la topologie teste-ouverte.

Démonstration. Premièrement, remarquons que si X est compactement engendré, alors (par définition) $C_k(X,Y) = C(X,Y)$. Ensuite, il est possible de montrer que le produit d'un compact avec un compactement engendré est compactement engendré ([Bro06] proposition 5.9.1, corollaire 1 où il montre d'ailleurs que l'on peut supposer l'espace seulement localement compact). La bijection énoncée est alors une simple réécriture de la précédente. ✿

Le théorème 3.2.5 implique, en passant par l'équivalence de catégories $\mathbf{Top}_k \simeq \mathbf{CG}$ (proposition 3.2.4), que $\mathbf{CG}$ est fermée : pour tous espaces topologiques compactement engendrés X, Y et Z, on a

$$C(X\times_k Y, Z) \simeq C(X, kC(Y,Z)).$$

Cette adjonction implique que le foncteur $Y \mapsto kC(X,Y)$ préserve les produits finis et donc les objets groupes abéliens. On désignera les objets groupes abéliens de $\mathbf{CG}$ de la manière suivante.

Définition 3.2.7. Un *groupe abélien k-topologique* est un groupe abélien A muni d'une topologie faisant de A un espace compactement engendré et tel que la somme $+ : A\times A \to A$ est un k-morphisme et l'inversion $inv : A \to A$ est une application continue. On note $\mathbf{CGAb}$ la catégorie des groupes abéliens k-topologiques dont les flèches sont les morphismes de groupes continus.

Remarque. Si A est un groupe abélien muni d'une topologie telle que la somme et l'inversion soient des k-morphismes, alors kA est un groupe abélien k-topologique.

On a vu au début de la section 2.3 que le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Ens})$ passait aux structures algébriques pour définir un foncteur $\mathbf{TopAb} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$. On peut alors faire de même avec sa restriction aux espaces compactement engendrés $\mathbf{CG} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Ens})$.

Proposition 3.2.8. *Si A est un groupe abélien k-topologique, alors $\underline{A}(S) = C(S, A)$ est un sous-groupe de A^S pour tout compact S. Ainsi, le foncteur de condensation $\mathbf{CG} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Ens})$ induit un foncteur $\mathbf{CGAb} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Ab})$.*

Démonstration. Soit $f, g \in C(S, A)$ avec S un espace compact. Leur somme peut-être décomposée de la manière suivante

$$f + g : S \xrightarrow[\text{cont.}]{\Delta_S} S \times S \xrightarrow[\text{cont.}]{f \times g} A \times A \xrightarrow[k\text{-morp.}]{+} A.$$

Comme S est compact, on sait que $k((f \times g) \circ \Delta_S) : S \to k(A \times A)$ est continue et donc $f + g$ est continue. ✿

Tout cela nous permet en fait de donner une structure de groupe abélien condensé à $\underline{C(X, A)}$ lorsque X est compactement engendré et A est un groupe abélien topologique.

Proposition 3.2.9. *Soit $X \in \mathbf{CG}$ et $A \in \mathbf{TopAb}$. Si l'on munit $C(X, A)$ de la topologie teste-ouverte, alors $kC(X, A)$ est un groupe abélien k-topologique.*

Démonstration. Comme énoncé dans la remarque suivant la définition 3.2.7, il suffit de démontrer que la somme $C(X, A) \times C(X, A) \to C(X, A)$ et l'inversion $C(X, A) \to C(X, A)$ sont des k-morphismes.

On sait que la somme et l'inversion de A

$$+_A : A \times A \to A$$
$$inv_A : A \to A$$

sont continues. Comme X est compactement engendré, on sait que l'association $Y \mapsto kC(X, Y)$ forme un foncteur $\mathbf{CG} \to \mathbf{CG}$. Donc, l'application $kC(X, inv_A) = k(inv_A \circ -) : kC(X, A) \to kC(X, A)$ est continue et correspond à l'inversion de $C(X, A)$.

De même pour la somme, on sait que $k(+_A \circ -) : kC(X, A \times A) \to kC(X, A)$ est continue. Or, comme le foncteur $Y \mapsto C(X, Y)$ est un adjoint à droite, il conserve les limites et donc

$$kC(X, A \times A) = kC(X, A) \times_k kC(X, A).$$

De plus, le foncteur $k : \mathbf{Top} \to \mathbf{CG}$ est adjoint à droite du foncteur d'oubli, donc il préserve aussi les limites et on a

$$kC(X, A) \times_k kC(X, A) = k(C(X, A) \times C(X, A)).$$

Ainsi, l'application $k+ : k(C(X, A) \times C(X, A)) \to kC(X, A)$ est continue. ✿

D'après les deux propositions précédentes, on peut donner une structure de groupe abélien condensé à $\underline{C(X, A)}$ lorsque A et un groupe topologique et X est un espace compactement engendré puisque, pour rappel, $\underline{kC(X, A)} = \underline{C(X, A)}$. On peut faire de même pour $C_{\mathbb{Z}}(A, B) \subset C(A, B)$ (avec A et B des groupes topologiques) grâce au résultat suivant.

Proposition 3.2.10. *Soit A un groupe abélien k-topologique et B un sous-groupe de A. Alors kB (B est muni de la topologie induite) est un groupe abélien k-topologique.*

Démonstration. C'est presque évident, la preuve n'est qu'un jeu d'écriture. Il faut montrer que les applications $k(+_{|B\times B}) : k(B \times B) \to kB$ et $k(inv_{|B}) : kB \to kB$ sont continues. On a en fait $k(+_{|B\times B}) = (k+)_{|k(B\times B)}$ qui est continue puisque $+ : A \times A \to A$ est un k-morphisme. De même, on a en fait $k(inv_{|B}) = k(inv)_{|kB}$ qui est continue puisque $inv : A \to A$ est un k-morphisme. ✿

Ainsi, $\underline{C_{\mathbb{Z}}(A,B)} = \underline{kC_{\mathbb{Z}}(A,B)}$ est un sous-groupe abélien condensé de $\underline{C(A,B)}$. Ces groupes abéliens feront l'objet du théorème 3.4.6.

3.3 Cas des ensembles condensés

La catégorie Cond(**Ens**) est une catégorie cartésienne : pour tout ensemble condensé X et Y, il faut poser $X \times Y(S) = X(S) \times Y(S)$. C'est en fait un résultat général sur les catégories de faisceaux $\widetilde{\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C}$ est un petit site puisque le foncteur d'oubli $\widetilde{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ commute avec les limites et $\widehat{\mathcal{C}}$ admet les mêmes limites que **Ens** d'après la proposition 2.2.1. La catégorie $\widetilde{\mathcal{C}}$ est alors toujours fermée. L'importance du foncteur hom interne de Cond(**Ens**) a été exhibée dans [Mar21].

L'expression du hom interne de $\widehat{\mathcal{C}}$ est en fait assez naturelle. Si l'on note $\mathcal{H}om(X,Y) \in \widehat{\mathcal{C}}$ le hom interne de deux préfaisceaux X et Y, on a, par le lemme de Yoneda, les isomorphismes suivants pour tout objet $S \in \mathcal{C}$:

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(\widehat{S} \times X, Y\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(\widehat{S}, \mathcal{H}om(X,Y)\right) \simeq \mathcal{H}om(X,Y)(S)$$

Ainsi, on pose $\mathcal{H}om(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{S} \times X, Y)$. Il s'agit bien d'un foncteur contravariant : à tout morphisme $f : S_1 \to S_2$, on associe l'application

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(\widehat{S_2} \times X, Y\right) \xrightarrow{-\circ\left(\widehat{f}\times \mathrm{id}_X\right)} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(\widehat{S_1} \times X, Y\right).$$

Proposition 3.3.1. *La catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est cartésienne fermée : pour tous préfaisceaux X, Y et Z, on a une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, \mathcal{H}om(Y,Z)).$$

Démonstration. Soit $f : X \times Y \to Z$ et $S \in \mathcal{C}$. On considère la bijection de Yoneda

$$\begin{aligned} X(S) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\widehat{S}, X) \\ x &\longmapsto \gamma_x := X(-)(x). \end{aligned}$$

qui est naturelle en X et en S. Pour $x \in X(S)$, posons $f'_S(x) = f \circ (\gamma_x \times \mathrm{id}_Y) : \widehat{S} \times Y \to Z$. Ainsi, on a défini une application $f'_S : X(S) \to \mathcal{H}om(Y,Z)(S)$.

Montrons que f' est naturelle en S *i.e* pour tout morphisme $h : S_1 \to S_2$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X(S_2) \arrow[r, "X(h)"] \arrow[d, "f'_{S_2}"'] & X(S_1) \arrow[d, "f'_{S_1}"'] \\ \mathrm{Hom}\left(\widehat{S_2} \times Y, Z\right) \arrow[r, "-\circ\left(\widehat{h}\times \mathrm{id}_Y\right)"'] & \mathrm{Hom}\left(\widehat{S_1} \times Y, Z\right) \end{tikzcd}$$

Soit $x \in X(S_2)$. On a

$$\begin{aligned} f'_{S_1}(X(h)(x)) &= f \circ (\gamma_{X(h)(x)} \times \mathrm{id}_Y) \\ &= f \circ ((\gamma_x \circ \widehat{h}) \times \mathrm{id}_Y) && \text{(naturalité de la bijection de Yoneda en } S\text{)} \\ &= f \circ (\gamma_x \times \mathrm{id}_Y) \circ (\widehat{h} \times \mathrm{id}_Y) \\ &= f'_{S_2}(x) \circ (\widehat{h} \times \mathrm{id}_Y) \end{aligned}.$$

On a donc $f' : X \to \mathcal{H}om(Y,Z)$ et on vient de définir une application (naturelle)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X\times Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \mathcal{H}om(Y,Z)) \\ f &\longmapsto f'. \end{aligned}$$

.

Construisons une application réciproque. Soit $f : X \to \mathcal{H}om(Y,Z)$. Pour tout $S \in \mathcal{C}$, posons

$$\begin{aligned} \overline{f}_S :\ X(S)\times Y(S) &\longrightarrow Z(S) \\ (x,y) &\longmapsto (f_S(x))_S(\mathrm{id}_S, y). \end{aligned}$$

Montrons que $\overline{f}$ est naturelle en S *i.e* pour tout morphisme $h : S_1 \to S_2$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X(S_2)\times Y(S_2) \arrow[r, "X(h)\times Y(h)"] \arrow[d, "\overline{f}_{S_2}"'] & X(S_1)\times Y(S_1) \arrow[d, "\overline{f}_{S_1}"'] \\ Z(S_2) \arrow[r, "Z(h)"'] & Z(S_1) \end{tikzcd}$$

Soit $(x,y) \in X(S_2)\times Y(S_2)$. On a

$$\begin{aligned} \overline{f}_{S_1}(X(h)(x), Y(h)(y)) &= (f_{S_1}(X(h)(x)))_{S_1}(\mathrm{id}_{S_1}, Y(h)(y)) \\ &= (\mathcal{H}om(Y,Z)(h)(f_{S_2}(x)))_{S_1}(\mathrm{id}_{S_1}, Y(h)(y)) && \text{(naturalité de } f) \\ &= \left(f_{S_2}(x)\circ\left(\widehat{h}\times \mathrm{id}_Y\right)\right)_{S_1}(\mathrm{id}_{S_1}, Y(h)(y)) \\ &= (f_{S_2}(x))_{S_1}(h, Y(h)(y)) \\ &= \left((f_{S_2}(x))_{S_1}\circ\left(\widehat{S_2}(h)\times Y(h)\right)\right)(\mathrm{id}_{S_2}, y) \\ &= (Z(h)\circ (f_{S_2}(x))_{S_2})(\mathrm{id}_{S_2}, y) && \text{(naturalité de } f_{S_2}(x)) \\ &= Z(h)\left(\overline{f}_{S_2}(x,y)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'association $f \mapsto \overline{f}$ définit une application (naturelle) $\mathrm{Hom}(X, \mathcal{H}om(Y,Z) \to \mathrm{Hom}(X\times Y, Z)$ et la rigoureuse lectrice pourra vérifier qu'il s'agit bien de la réciproque recherchée. ✿

Il existe une autre manière équivalente de définir $\mathcal{H}om(X,Y)$ en passant par la notion de *catégorie tranchée* (« slice category » en anglais). Cet autre formalisme peut s'avérer plus pratique pour montrer le résultat suivant :

Proposition 3.3.2. *Soit $\mathcal{C}$ un site et $X, Y \in \widehat{\mathcal{C}}$. Si Y est un faisceau, alors $\mathcal{H}om(X,Y)$ en est un aussi.*

Démonstration. Une preuve détaillée qui utilise nos définitions peut être retrouvée dans [MM12] (section III.6. proposition 1) dont nous reprenons ici les arguments principaux. Pour montrer que $\mathcal{H}om(X,Y)$ est un faisceau, on utilise la caractérisation (iii) de la proposition 1.2.4. Soit $R \subset \widehat{S}$ un crible couvrant de S et $(\sigma_f) \in \prod_{f\in R}\mathcal{H}om(X,Y)(S_f)$ une famille de sections compatible avec R (ici $S_f := \mathrm{dom}\, f$).

Montrons qu'il existe une unique $\sigma \in \mathcal{H}om(X,Y)(S)$ telle que $\sigma\circ\left(\widehat{f}\times \mathrm{id}_X\right) = \sigma_f$. Montrons d'abord l'unicité pour ensuite en déduire une preuve de l'existence. Supposons qu'une telle section σ existe. On a alors pour tous $f \in R$, $h : S' \to S_f$ et $x \in X(S')$:

$$(\sigma)_{S'}(f\circ h, x) = (\sigma_f)_{S'}(h, x)$$

En particulier, si $h = \mathrm{id}_{S_f}$, on a :

$$(\sigma)_{S_f}(f, x) = (\sigma_f)_{S_f}(\mathrm{id}_{S_f}, x) \tag{1}$$

C'est bien, mais on peut faire mieux. Soit $g : S' \to S$. On sait que $g^{-1}R \subset \widehat{S'}$ est un crible couvrant de S' et $(\sigma)_{S'}(g, x) \in Y(S')$. Comme Y est un faisceau, $(\sigma)_{S'}(g, x)$ est uniquement déterminé par la famille de sections compatible avec $g^{-1}R$ (pour Y) $(Y(h)((\sigma)_{S'}(g, x)))_{h \in g^{-1}R}$. Les sections de cette famille peuvent être écrites explicitement :

$$\begin{aligned} Y(h)((\sigma)_{S'}(g, x)) &= (\sigma)_{S_{g\circ h}}(g \circ h, X(h)(x)) && \text{(naturalité de } \sigma : \widehat{S} \times X \to Y) \\ &= (\sigma_{g\circ h})_{S_{g\circ h}}(\mathrm{id}_{S_{g\circ h}}, X(h)(x)) && \text{(d'après (1))} \end{aligned}$$

Pour l'existence, il faut montrer que la famille de sections

$$\left((\sigma_{g\circ h})_{S_{g\circ h}}(\mathrm{id}_{S_{g\circ h}}, X(h)(x))\right)_{h \in g^{-1}R} \in \prod_{h \in g^{-1}R} Y(S_{g\circ h})$$

est compatible avec $g^{-1}R$ (pour Y) pour tous $g : S' \to S$ et $x \in X(S')$. D'après le lemme 1.2.3, cela revient à montrer que pour tout $h' : K' \to K$, on a

$$Y(h')((\sigma_{g\circ h})_K(\mathrm{id}_{S_{g\circ h}}, X(h)(x))) = (\sigma_{g\circ h\circ h'})_{K'}(\mathrm{id}_{K'}, X(h \circ h')(x))$$

ce qui se vérifie facilement en utilisant le fait que (σ_f) est compatible avec R (pour $\mathcal{H}om(X, Y)$). Ainsi, comme expliqué lors de la preuve de l'unicité, on peut construire $(\sigma)_{S'}(g, x)$ grâce au fait que Y soit un faisceau et il reste à montrer que σ est naturelle ainsi qu'elle vérifie bien $\sigma \circ \left(\widehat{f} \times \mathrm{id}_X\right) = \sigma_f$. ✿

Corollaire 3.3.3. *La catégorie $\widetilde{\mathcal{C}}$ des faisceaux sur un petit site $\mathcal{C}$ est cartésienne fermée.*

Démonstration. Un produit de faisceaux est le produit des préfaisceaux sous-jacents (le foncteur d'oubli est un adjoint à droite et donc commute aux limites) ce qui fait de $\widetilde{\mathcal{C}}$ une catégorie cartésienne. Soit $X, Y, Z \in \widetilde{\mathcal{C}}$. D'après la proposition précédente, on sait que $\mathcal{H}om(Y, Z) \in \widetilde{\mathcal{C}}$ et donc on a

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(X \times Y, Z) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, \mathcal{H}om(Y, Z)) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(X, \mathcal{H}om(Y, Z))$$

d'après la proposition 3.3.1. ✿

Ainsi, la catégorie des ensembles condensés est cartésienne fermée. On peut en fait retrouver son foncteur hom interne dans le cas des espaces compactement engendrés que l'on a condensés.

Théorème 3.3.4. *Soit X et Y des espaces topologiques. Supposons que X soit compactement engendré. On munit alors $C(X, Y)$ de la topologie teste-ouverte (*cf.* section 3.2). Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathcal{H}om(\underline{X}, \underline{Y}) \simeq \underline{C(X, Y)}.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $S \in \mathbf{ED}$, il existe une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}(\widehat{S} \times \underline{X}, \underline{Y}) \simeq C(S, C(X, Y)).$$

Or, cette bijection est donnée par les adjonctions vues précédemment :

$$\begin{aligned} C(S, C(X, Y)) &\simeq C(S \times X, Y) && \text{(corollaire 3.2.6)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\underline{S \times X}, \underline{Y}) && \text{(pleine fidélité de la condensation, proposition 1.4.2)} \\ &= \mathrm{Hom}(\underline{S} \times \underline{X}, \underline{Y}) && \text{(la condensation commute aux limites, théorème 1.4.4)} \\ &= \mathrm{Hom}(\widehat{S} \times \underline{X}, \underline{Y}) \end{aligned}$$

✿

3.4 Cas des groupes abéliens condensés

Précédemment, on a vu que pour toute catégorie $\mathcal{C}$ la structure cartésienne fermée de $\widehat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C} : \mathbf{Ens}]$ est héritée de **Ens**. On peut alors refaire la même chose avec $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} = [\mathcal{C}, \mathbf{Ab}]$ puisque $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ est monoïdale fermée.

Soit $A, B \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$. On pose, pour tout $S \in \mathcal{C}$:

$$X \otimes_{\mathbb{Z}} Y(S) = X(S) \otimes_{\mathbb{Z}} Y(S)$$

On connaît la fonctorialité du produit tensoriel de groupes abéliens. Pour rappel, si on se donne deux morphisme de groupes abéliens $f_1 : A_1 \to B_1$ et $f_2 : A_2 \to B_2$, alors il existe une unique application linéaire $f_1 \otimes f_2 : A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \to B_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$ telle que $f_1 \otimes f_2(a_1 \otimes a_2) = f_1(a_1) \otimes f_2(a_2)$ par propriété universelle du produit tensoriel. Ainsi, le produit tensoriel de préfaisceaux de groupes abéliens est un préfaisceau de groupes abéliens en posant, pour tout morphisme $f : S_1 \to S_2$ de $\mathcal{C}$:

$$X \otimes_{\mathbb{Z}} Y(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

En notant $\widehat{\mathbb{Z}} : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ le préfaisceau constant égal à $\mathbb{Z}$ sur les objets et à $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ sur les morphismes, on peut vérifier sans soucis que $(\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathbb{Z}})$ est une catégorie monoïdale symétrique. Cette catégorie monoïdale et alors toujours fermée. À l'instar du lemme 2.2.10, on note $\mathbb{Z}[X]$ le préfaisceau « groupe abélien libre » associé à un préfaisceau X (ici il n'y a pas besoin d'étape de faisceautisation). On pose alors (comme on l'avait fait dans le cas des faisceaux d'ensembles), pour tous préfaisceaux de groupes abéliens A et B, objet $S \in \mathcal{C}$ et morphisme $f : S_1 \to S_2$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)(S) := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}} \left(\mathbb{Z}[\widehat{S}] \otimes_{\mathbb{Z}} A, B \right)$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)(f) := - \circ \left(\mathbb{Z}[\widehat{f}] \otimes \mathrm{id}_A \right)$$

Ainsi, $\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$ est un préfaisceau de groupes abéliens car $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$ est pré-additive et c'est le foncteur hom interne que l'on cherchait.

Proposition 3.4.1. *Soit $\mathcal{C}$ un site. $(\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathbb{Z}})$ est fermée : Pour tout $A, B, C \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$, il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(B, C)).$$

Démonstration. La preuve est sensiblement la même que celle de la proposition 3.3.1. Si on se donne une transformation naturelle $f : A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$, il faut poser, pour tout $S \in \mathcal{C}$ et $a \in A(S)$:

$$f'_S(a) = f \circ (\gamma_a \otimes \mathrm{id}_B) : \mathbb{Z}[\widehat{S}] \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$$

Ici, on a étendu $\gamma_a : \widehat{S} \to A$ à $\mathbb{Z}[\widehat{S}]$ par adjonction de $\mathbb{Z}[\cdot]$ avec le foncteur d'oubli. La naturalité de f' se vérifie exactement de le même manière que dans 3.3.1.

Pour la réciproque, si on se donne $g : A \to \underline{\mathrm{Hom}}(B, C)$, on pose, pour tout $S \in \mathcal{C}$, l'application $\overline{g}_S : A(S) \otimes_{\mathbb{Z}} B(S) \to C(S)$ qui est l'unique morphisme tel que :

$$\overline{g}_S(a \otimes b) = (g_S(a))_S(\mathrm{id}_S \otimes b)$$

De même la naturalité de $\overline{g}$ se vérifie comme dans 3.3.1.

Vérifions le fait qu'il s'agit bien de réciproques comme nous ne l'avions pas fait dans 3.3.1. Soit $f : A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$. Montrons que $\overline{f'} = f$. Soit $S \in \mathcal{C}$, $a \in A(S)$ et $b \in B(S)$. On a :

$$\begin{aligned}(\overline{f'})_S(a \otimes b) &= (f'_S(a))_S(\mathrm{id}_S \otimes b) \\ &= (f \circ (\gamma_a \otimes \mathrm{id}_B))_S(\mathrm{id}_S \otimes b) \\ &= f_S(A(\mathrm{id}_S)(a) \otimes b) \\ &= f_S(a \otimes b)\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $g : A \to \underline{\mathrm{Hom}}(B,C)$. Montrons que $\overline{g}' = g$. Soit $S \in \mathcal{C}$, $a \in A(S)$, $h \in \widehat{S}(S')$ et $b \in B(S)$. On a

$$\begin{aligned}((\overline{g}')_S(a))_{S'}(h\otimes b) &= (\overline{g})_{S'} \circ (\gamma_a \otimes \mathrm{id}_B)_{S'}(h \otimes b)\\ &= (\overline{g})_{S'}(A(h)(a) \otimes b)\\ &= (g_{S'}(A(h)(a))_{S'}(\mathrm{id}_{S'} \otimes b)\\ &= (g_S(a))_{S'}(h\otimes b).\end{aligned}$$

✿

Ce nouveau foncteur hom est lié à celui que l'on avait construit sur $\widehat{\mathcal{C}}$ de la manière suivante.

Proposition 3.4.2. *Soit $X \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $A \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$. Il existe une bijection naturelle de préfaisceaux d'ensembles :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], A) \simeq \mathcal{H}om(X,A)$$

Démonstration. Pour tout $S \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], A)(S) &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}\left(\mathbb{Z}[\widehat{S}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X], A\right)\\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}\left(\mathbb{Z}[\widehat{S}\times X], A\right)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(\widehat{S}\times X, A\right) && \text{(lemme 2.2.10)}\\ &= \mathcal{H}om(X,A)(S).\end{aligned}$$

La deuxième égalité ici provient du fait qu'en général, pour tous $X, Y \in \widehat{\mathcal{C}}$ et tout $S \in \mathcal{C}$, on a $\mathbb{Z}[X(S)] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Y(S)] \simeq \mathbb{Z}[X(S) \times Y(S)]$ et donc $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Y] \simeq \mathbb{Z}[X \times Y]$. ✿

De manière plus générale, on peut toujours comparer ces foncteurs hom internes de la façon suivante :

Lemme 3.4.3.

(*i*) *Soit $X \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $B \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$. On peut munir naturellement $\mathcal{H}om(X,B)$ d'une structure de préfaisceau de groupes abéliens.*

(*ii*) *Soit $A, B \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$. Il existe une injection de préfaisceaux de groupes abéliens*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A,B) \hookrightarrow \mathcal{H}om(A,B)$$

dont l'image correspond en $S \in \mathcal{C}$ aux applications $\widehat{S} \times A \to B$ qui sont linéaires en A.

Démonstration. (*i*) : Soit $S \in \mathcal{C}$. On souhaite donner une structure de groupe à $\mathrm{Hom}\left(\widehat{S} \times X, B\right)$. Comme pour tout $S' \in \mathcal{C}$, $B(S')$ est un groupe abélien, on définit naturellement la somme de deux transformations naturelles $\gamma, \eta : \widehat{S} \times X \to B$ par l'expression

$$(\gamma + \eta)_{S'}(h,a) = \gamma_{S'}(h,a) + \eta_{S'}(h,a) \in B(S')$$

où $h \in \widehat{S}(S')$ et $a \in A(S')$. Cette structure de groupe correspond en fait à celle faisant de l'isomorphisme d'ensembles condensés de la proposition précédente

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], B) \simeq \mathcal{H}om(X,B)$$

un isomorphisme de groupes abéliens condensés. On peut alors vérifier facilement que pour tout morphisme $f : S_1 \to S_2$, l'application induite $\mathrm{Hom}\left(\widehat{S_2} \times X, B\right) \to \mathrm{Hom}\left(\widehat{S_1} \times X, B\right)$ est un morphisme de groupes.

(*ii*) : Soit $S \in \mathcal{C}$. Montrons qu'on a une injection

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}\left(\mathbb{Z}[\widehat{S}] \otimes_{\mathbb{Z}} A, B\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}\left(\widehat{S} \times A, B\right).$$

On sait que pour tout $S' \in \mathcal{C}$, on a la suite de morphismes de groupes

$$i_{S'} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}[\widehat{S}(S')] \otimes_{\mathbb{Z}} A(S'), B(S')\right) \simeq \mathrm{Bil}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}[\widehat{S}(S')] \times A(S'), B(S')\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}\left(\widehat{S}(S') \times A(S'), B(S')\right)$$

dont l'image correspond aux application linéaires en $A(S')$. Cette injection permet de définir alors l'injection i souhaitée. Le fait que i soit linéaire provient du fait que pour tout $S' \in \mathcal{C}$, l'application $i_{S'}$ est linéaire. ✿

On peut alors démontrer l'équivalent de 3.3.2 dans le cas abélien.

Proposition 3.4.4. *Soit $A, B \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$. Si B est un faisceau, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$ aussi.*

Démonstration. L'injection du lemme précédent permet de créer pour tout préfaisceau X une injection $\mathrm{Hom}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(A, B)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(X, \mathcal{H}om(A, B))$. Soit $S \in \mathcal{C}$ et $R \subset \widehat{S}$ un crible couvrant de S. On peut construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\widehat{S}, \underline{\mathrm{Hom}}(A, B)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}(R, \underline{\mathrm{Hom}}(A, B)) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Hom}(\widehat{S}, \mathcal{H}om(A, B)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(R, \mathcal{H}om(A, B))
\end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont les morphismes de restriction et celle du bas est un isomorphisme puisque, B étant un faisceau, $\mathcal{H}om(A, B)$ en est un aussi d'après la proposition 3.3.2. Ainsi, la flèche de restriction du haut est injective et il reste à montrer sa surjectivité.

Soit $\gamma : R \to \mathcal{H}om(A, B)$ tel que pour tout $r \in R$, le morphisme $\sigma_r := \gamma(r) : \widehat{\mathrm{dom}\, r} \times A \to B$ est linéaire en A. Soit $\sigma : \widehat{S} \times A \to B$ telle que $\gamma_{\sigma|R} = \gamma$ avec

$$\begin{aligned}
(\gamma_\sigma)_{S'} :\ \widehat{S}(S') &\longrightarrow \mathcal{H}om(A, B)(S') \\
h &\longmapsto \sigma \circ \left(\widehat{h} \times \mathrm{id}_A\right)
\end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que pour tout $h : S' \to S$, le morphisme $\sigma \circ \left(\widehat{h} \times \mathrm{id}_A\right) : \widehat{S'} \times A \to B$ est linéaire en A. Comme id_A est linéaire, il suffit en fait de démontrer que $\sigma : \widehat{S} \times A \to B$ est linéaire en A.

Soit $g : S' \to S$ et $a_1, a_2 \in A(S')$. On a vu dans la démonstration de 3.3.2 que $(\sigma)_{S'}(g, a_i)$ est défini comme l'unique élément de $B(S')$ tel que pour tout $h \in g^{-1}R$, on ait

$$B(h)((\sigma)_{S'}(g, a_i)) = \sigma_{g \circ h}(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}\, h}, A(h)(a_i)).$$

Ainsi, pour tout $h \in g^{-1}R(S'')$, on a

$$\begin{aligned}
B(h)((\sigma)_{S'}(g, a_1 + a_2)) &= \sigma_{g \circ h}(\mathrm{id}_{S''}, A(h)(a_1 + a_2)) \\
&= \sigma_{g \circ h}(\mathrm{id}_{S''}, A(h)(a_1)) + \sigma_{g \circ h}(\mathrm{id}_{S''}, A(h)(a_2)) \quad \text{(linéarité de } A(h) \text{ et } \sigma_{g \circ h}) \\
&= B(h)((\sigma)_{S'}(g, a_1)) + B(h)((\sigma)_{S'}(g, a_2)) \\
&= B(h)((\sigma)_{S'}(g, a_1) + (\sigma)_{S'}(g, a_2)) \quad \text{(linéarité de } B(h))
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\sigma)_{S'}(g, a_1 + a_2) = (\sigma)_{S'}(g, a_1) + (\sigma)_{S'}(g, a_2)$ et donc que σ est linéaire en A. ✿

Pour le produit tensoriel, ce n'est pas aussi agréable : un produit tensoriel de faisceaux de groupes abéliens n'est pas forcément un faisceau. La solution est de poser pour tous $A, B \in \widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$:

$$A \widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}} B := L(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

Lemme 3.4.5. *Soit $\mathcal{C}$ un site. Pour tous faisceaux $A, B \in \widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}$, on a*

$$LA\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}}LB = L(A \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Démonstration. Comme $\otimes_{\mathbb{Z}}$ est symétrique, il suffit de montrer que $L(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) = L(LA \otimes_{\mathbb{Z}} B)$. En considérant le foncteur naturel $l_A : A \to LA$, on obtient le foncteur

$$L(l_A \otimes \mathrm{id}_B) : L(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \to L(LA \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Pour conclure, montrons qu'on a la propriété universelle suivante :

$$\begin{tikzcd} L(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \arrow[r, "\forall"] \arrow[d, "L(l_A \otimes \mathrm{id}_B)"'] & C \in \widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \\ L(LA \otimes_{\mathbb{Z}} B) \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Cette propriété universelle est donnée par la suite de bijections naturelles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(L(A \otimes_{\mathbb{Z}} B), C) &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(B, C)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(LA, \underline{\mathrm{Hom}}(B, C)) \qquad (\underline{\mathrm{Hom}}(B, C) \in \widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}} \text{ car } C \in \widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(LA \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \\ &= \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}}(L(LA \otimes_{\mathbb{Z}} B), C) \end{aligned}$$

✿

En notant $\widetilde{\mathbb{Z}} := L\mathbb{Z}$, la faisceautisation du foncteur constant égal à $\mathbb{Z}$, on peut prouver que $(\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{Ab}}, \widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}}, \widetilde{\mathbb{Z}})$ est une catégorie monoïdale fermée grâce au foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$. Par exemple, le lemme précédent permet de montrer l'associativité de $\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}}$. Ainsi, la catégorie des groupes abéliens condensés est symétrique monoïdale fermée.

Dans le cas des groupes abéliens condensés on peut retrouver le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$ en condensant la topologie teste-ouverte (*cf.* section 3.2) de manière analogue au résultat 3.3.4.

Théorème 3.4.6. *Soit A et B des groupes abéliens topologiques. Supposons que A soit compactement engendré. On munit alors $C(A, B)$ de la topologie teste-ouverte et $C_{\mathbb{Z}}(A, B) \subset C(A, B)$ de la topologie induite. On a alors un isomorphisme de groupes abéliens condensés :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) \simeq \underline{C_{\mathbb{Z}}(A, B)}$$

Démonstration. Grâce au lemme 3.4.3, au théorème 3.3.4 et à l'application induite par l'injection (continue) $C_{\mathbb{Z}}(A, B) \subset C(A, B)$ sur les ensembles condensés respectifs, on peut construire le diagramme à commuter suivant :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) \arrow[r, dotted, "?"] \arrow[d, hook] & \underline{C_{\mathbb{Z}}(A, B)} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{H}om(\underline{A}, \underline{B}) \arrow[r, "\sim"] & \underline{C(A, B)} \end{tikzcd}$$

Bien que $C(A, B)$ et $C_{\mathbb{Z}}(A, B)$ ne soient pas nécessairement des groupes topologiques, on sait donner une structure de groupe abélien condensé à leurs ensembles condensés associés puisque $kC(A, B)$ et $kC_{\mathbb{Z}}(A, B)$ sont des groupes abéliens k-topologique (*cf.* proposition 3.2.8). L'injection de droite est alors évidemment linéaire. Aussi, on sait donner une structure de groupe abélien condensé à $\mathcal{H}om(\underline{A}, \underline{B})$ telle que l'injection de gauche soit linéaire d'après le lemme 3.4.3.

Montrons que l'isomorphisme $\mathcal{H}om(\underline{A}, \underline{B}) \to \underline{C(A,B)}$ est linéaire. Si on explicite la démonstration de 3.3.4, cet isomorphisme associe à tout $\gamma : \widehat{S} \times \underline{A} \to \underline{B}$ l'application (continue car A est compactement engendré)

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow C(A,B) \\ s &\longmapsto \gamma_*(s,-). \end{aligned}$$

Cette association est linéaire puisque pour tous $\gamma, \eta : \widehat{S} \times \underline{A} \to \underline{B}$ et $s \in S$, on a

$$(\gamma + \eta)_*(s,-) = \gamma_*(s,-) + \eta_*(s,-).$$

Ainsi, il reste à faire commuter le diagramme avec une application surjective pour conclure. On sait d'après le lemme 3.4.3 que l'image de l'injection de gauche du diagramme correspond aux applications naturelles $\gamma : \widehat{S} \times \underline{A} \to \underline{B}$ qui sont linéaires en $\underline{A}$. On voit facilement que si γ est linéaire en $\underline{A}$, alors γ_* est linéaire en A : pour tout $s \in S$, $\gamma_*(s,-) \in C_{\mathbb{Z}}(A,B)$. Cela prouve que l'on peut faire commuter la diagramme.

Reste à montrer la surjectivité. Soit $h : S \to C_{\mathbb{Z}}(A,B)$, une application continue. L'application induite par l'adjonction 3.2.6 $h' : S \times A \to B$ est linéaire en A et donc le morphisme condensé $\underline{h'} : \widehat{S} \times \underline{A} \to \underline{B}$ sera linéaire en $\underline{A}$. En effet, si on se donne des applications continues $f : S' \to S$ et $g_1, g_2 : S' \to A$, alors on a

$$\underline{h'}(f, g_1 + g_2) = h \circ (f \times (g_1 + g_2)) = h \circ (f \times g_1) + h \circ (f \times g_2) = \underline{h'}(f, g_1) + \underline{h'}(f, g_2).$$

Ainsi, $\underline{h'}$ appartient à l'image de l'injection de gauche ce qui finit de prouver la surjectivité, cette démonstration ainsi que ce rapport de stage. ✿

Bibliographie

[AGV] Michael Artin, Alexandre Grothendieck et Jean-Louis Verdier. In : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* T. 1. Réédition de Fabrice Orgogozo. URL : http://www.normalesup.org/~forgogozo/SGA4/tomes/SGA4.pdf.

[Àsg21] Dagur Àsgeirsson. « The Fundations of Condensed Mathematics ». Mém. de mast. Université de Paris centre, 2021. URL : https://dagur.sites.ku.dk/files/2022/01/condensed-foundations.pdf.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra : Volume 2, Categories and Structures.* T. 2. Cambridge University Press, 1994.

[Bro06] Ronald Brown. *Topology and groupoids.* 2006. URL : https://groupoids.org.uk/pdffiles/topgrpds-e.pdf.

[CS19a] Dustin Clausen et Peter Scholze. *Lectures on analytic geometry.* 2019. URL : https://www.%20math.%20uni-bonn.%20de/people/scholze/Analytic.%20pdf.

[CS19b] Dustin Clausen et Peter Scholze. *Lectures on condensed mathematics.* 2019. URL : https://www.math.unibonn.de/people/scholze/Condensed.pdf.

[DG23] Baptiste Dugué et Jules Givelet. « Espaces de Stone ». Mém. de mast. Université de Rennes, 2023. URL : https://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Enseignement_files/Espaces%20de%20Stone.pdf.

[Gle58] Andrew M. Gleason. « Projective topological spaces ». In : *Illinois Journal of Mathematics* 2.4A (1958), p. 482-489. URL : https://projecteuclid.org/journals/illinois-journal-of-mathematics/volume-2/issue-4A/Projective-topological-spaces/10.1215/ijm/1255454110.full.

[Gro57] Alexandre Grothendieck. « Sur quelques points d'algèbre homologique ». In : *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 9.2 (1957), p. 119-183. URL : https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-9/issue-2/Sur-quelques-points-dalg%C3%A8bre-homologique-I/10.2748/tmj/1178244839.full.

[Hig77] P.J Higgins. « Coproducts of topological abelian groups ». In : *Journal of Algebra* 44.1 (1977), p. 152-159. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/00218693779%5C%5C01697.

[Joh02] Peter T Johnstone. In : *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium.* T. 2. Oxford University Press, 2002. Chap. C2.

[MM12] Saunders MacLane et Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic : A first introduction to topos theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[Mar21] Sofía Marlasca Aparicio. « Condensed Mathematics : The internal Hom of condensed sets and condensed abelian groups and a prismatic construction of the real numbers ». In : *arXiv e-prints* (2021), arXiv-2109. URL : https://arxiv.org/pdf/2109.07816.pdf.

[nLa23a] nLab authors. *adjoints preserve (co-)limits.* https://ncatlab.org/nlab/show/adjoints+preserve+%28co-%29limits. Juin 2023.

[nLa23b] nLab authors. *compactly generated topological space.* https://ncatlab.org/nlab/show/compactly+generated+topological+space. Juill. 2023.

[nLa23c] nLab authors. *limits of presheaves are computed objectwise.* https://ncatlab.org/nlab/show/limits+of+presheaves+are+computed+objectwise. Juin 2023.

[Pop73] Nicolae Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*. T. 3. Academic Press, 1973. Chap. 2.

[Rai59] John Rainwater. « A note on projective resolutions ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* T. 10. 5. 1959, p. 734-735. url : https://www.ams.org/journals/proc/1959-010-05/S0002-9939-1959-0123290-8/S0002-9939-1959-0123290-8.pdf.

[Sta23] The Stacks project authors. *The Stacks project, Lemma 20.22.3*. https://stacks.math.columbia.edu/tag/0A3F. 2023.