Université de Rennes
Master 2 Mathématiques fondamentales

Mémoire de fin d'études

Présentation de l'enveloppante d'une algèbre sur une opérade quadratique binaire

Jules Givelet

Stage effectué au LMJL, encadré par :
Friedrich Wagemann
Salim Rivière

Avril-Juin 2025

Résumé

Ce mémoire fait office d'introduction au langage des opérades, notamment dans le cadre algébrique où l'on peut développer une notion de module sur une algèbre et de cohomologie : la cohomologie d'André-Quillen. Cette cohomologie généralise simultanément la cohomologie de Hochschild pour les algèbres associatives, la cohomologie de Harrison pour les algèbres commutatives et la cohomologie de Chevalley-Eilenberg pour les algèbres de Lie. Il s'avère que pour toute algèbre A sur une opérade $\mathcal{P}$ donnée, il existe une algèbre associative $U_{\mathcal{P}}(A)$ appelée *algèbre enveloppante* telle que les modules opéradiques sur A se réalisent comme les modules à gauche sur $U_{\mathcal{P}}(A)$. De plus, cette algèbre permet de réaliser la cohomologie d'André-Quillen comme un foncteur Ext dans certains cas (*cf.* [Mil11] pour une étude détaillée de ces cas). Ainsi, on propose dans ce mémoire d'étudier l'algèbre enveloppante d'une algèbre sur une opérade en donnant une présentation de celle-ci à partir de la donnée seule d'une présentation quadratique binaire de l'opérade.

Table des matières

1 Généralités sur les opérades

1.1 Définitions et premiers exemples

La notion d'opérade peut être définie très généralement pour toute catégorie monoïdale symétrique. Néanmoins, on se concentrera ici sur les *opérades algébriques* qui sont les opérades sur la catégorie monoïdale des modules sur un anneau commutatif munie du produit tensoriel.

Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ la $\mathbb{K}$-algèbre sur ce groupe. On notera $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ la catégorie des $\mathbb{K}$-modules et $\mathrm{Mod}(\mathfrak{S}_n)$ la catégorie des $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$-modules à droites.

Définition 1.1.1. Un $\mathfrak{S}$-*module (à droite)* est un objet de la catégorie

$$\mathrm{Mod}(\mathfrak{S}) := \prod_{n \geqslant 0} \mathrm{Mod}(\mathfrak{S}_n).$$

Ainsi, un $\mathfrak{S}$-module est une suite de $\mathbb{K}$-modules $M = (M(0), M(1), M(2), \dots)$ où $M(n)$ est un $\mathfrak{S}_n$-module à droite et un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules $f : M \to N$ est alors une suite $(f_n : M(n) \to N(n))_{n \geqslant 0}$ où f_n est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$-modules à droites.
Exemple 1.1.2. Un $\mathfrak{S}$-module important pour la suite est $\mathrm{Bin} := (0, 0, \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2], 0, \dots)$.

Pour donner la définition combinatoire d'une opérade, rappelons que pour toute liste d'indices $(i_1, \dots i_n)$, on a un morphisme injectif de groupes

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_n} &\hookrightarrow \mathfrak{S}_{i_1 + \cdots + i_n} \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_n) &\longmapsto \sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n \end{aligned}$$

où $\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n$ agit comme σ_1 sur les i_1 premiers indices, comme σ_2 sur les i_2 suivant, *etc.* Avec une formule, cela donne $(\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n)(i_1 + \cdots + i_{k-1} + j) = i_1 + \cdots + i_{k-1} + \sigma_k(j)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, i_k\}$.

On a aussi un morphisme injectif

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\hookrightarrow \mathfrak{S}_{i_1 + \cdots + i_n} \\ \sigma &\longmapsto \sigma_{(i_1, \dots, i_n)} \end{aligned}$$

où $\sigma_{(i_1, \dots, i_n)}$ agit sur l'ensemble $\{1, \dots, i_1 + \cdots + i_n\}$ en permutant les n listes d'indices successives de la forme $(i_1 + \cdots + i_{k-1} + 1, \dots, i_1 + \cdots + i_{k-1} + i_k)$.

Définition 1.1.3. Une *opérade* est un $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{P}$ muni d'applications $\mathbb{K}$-linéaires

$$\begin{aligned} \gamma_{i_1, \dots, i_n} : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n) &\longrightarrow \mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n) \\ \mu \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k &\longmapsto \mu \circ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

pour toute liste d'indices $(i_1, \dots, i_n)$ appelées *compositions* vérifiant les trois axiomes suivant.

1. **Unité** : il existe un élément de $\mathcal{P}(1)$ noté id tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$:
$$\begin{cases} \mathrm{id} \circ \mu = \mu \\ \mu \circ (\mathrm{id}, \dots, \mathrm{id}) = \mu \end{cases}$$
2. **Associativité** : pour toute liste de listes d'indices $\big((j_1^1, \dots, j_{i_1}^1), (j_1^2 \dots, j_{i_2}^2), \dots, (j_1^n, \dots, j_{i_n}^n)\big)$, on a pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $\alpha_k \in \mathcal{P}(i_k)$ et $\beta_{k'}^k \in \mathcal{P}(j_{k'}^k)$:
$$(\mu \circ (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \circ \big(\beta_1^1, \dots, \beta_{i_1}^1, \dots, \beta_1^n, \dots, \beta_{i_n}^n\big) = \mu \circ \big(\alpha_1 \circ (\beta_1^1, \dots, \beta_{i_1}^1), \dots, \alpha_n \circ (\beta_1^n, \dots, \beta_{i_n}^n)\big)$$
3. **Symétrie** : pour toute liste d'indices $(i_1, \dots, i_n)$, on a pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $\alpha_k \in \mathcal{P}(i_k)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{i_k}$:
$$(\mu \cdot \sigma) \circ (\alpha_1 \cdot \sigma_1, \dots, \alpha_n \cdot \sigma_n) = \big(\mu \circ \big(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}\big)\big) \cdot (\sigma_{(i_1, \dots, i_n)} \cdot (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n))$$

Un morphisme d'opérades $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules préservant la composition et l'identité, *i.e.* $f(\mu \circ (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f(\mu) \circ (f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n))$ et $f(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

La définition précédente peut paraître lourde mais est assez naturelle. Il faut penser un élément $\mu \in \mathcal{P}(n)$ comme une opération à n entrées et une sortie si bien que l'on appelle l'entier n l'*arité* de μ. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur une telle opération s'identifie alors à la permutation de ses entrées et la composition γ s'identifie à la composition de ces opérations.

Il est possible de donner une définition plus concise mais plus conceptuelle d'opérade (*cf.* [LV12] 5.2.1) en identifiant les $\mathfrak{S}$-modules à leur *foncteur de Schur* qui est un endofoncteur de $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ et une opérade à une structure de *monade* sur un tel endofoncteur. La difficulté est alors de montrer que la catégorie des foncteurs de Schur est stable par composition *cf.* [LV12] 5.1.14.

Exemples 1.1.4.

— L'opérade triviale $I = \mathcal{V}ect$ est le $\mathfrak{S}$-module $(0, \mathbb{K}, 0, 0, \dots)$, munis des compositions $\gamma_{i_1,\dots i_n}$ qui sont nulles si $n > 1$ ou si $n = 1$ et $i_1 \neq 1$ et est induite par la multiplication de $\mathbb{K}$ si $i_1 = n = 1$. L'unité de $\mathbb{K}$ est alors l'unité de cette opérade.

— L'opérade $\mathcal{C}om$ est le $\mathfrak{S}$-module $(0, \mathbb{K}, \mathbb{K}, \dots)$, où on fait agir $\mathfrak{S}_n$ trivialement sur $\mathbb{K}$, muni des compositions induites par la multiplication de $\mathbb{K}$. L'unité est alors l'unité de $\mathbb{K}$.

— L'opérade $u\mathcal{C}om$ est obtenue en remplaçant 0 par $\mathbb{K}$ en arité 0 dans $\mathcal{C}om$.

— L'opérade $\mathcal{A}ss$ est définie par $\mathcal{A}ss(n) = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ (représentation régulière) pour tout $n \geqslant 1$ et $\mathcal{A}ss(0) = 0$. Ses compositions sont définies par

$$\sigma \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_n) := \sigma_{(i_1,\dots,i_n)} \cdot (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n)$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{i_k}$. L'unité est encore l'unité de $\mathbb{K}$.

— On obtient $u\mathcal{A}ss$ en remplaçant 0 par $\mathbb{K}$ en arité 0 dans $\mathcal{A}ss$.

— Pour tout $\mathbb{K}$-module A, on définit le $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{E}nd_A$ par $\mathcal{E}nd_A(n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A)$ muni de l'action à droite de $\mathfrak{S}_n$ induite par l'action à gauche naturelle sur $A^{\otimes n}$. Explicitement, on a

$$(\mu \cdot \sigma)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \mu(a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}).$$

On munit $\mathcal{E}nd_A$ des compositions données par la composition de morphismes dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$:

$$\mu \circ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \mu \circ (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n).$$

1.2 Opérade libre

Si l'on note Opé la catégorie des opérades, on peut considérer le foncteur d'oubli $\text{Opé} \to \mathrm{Mod}(\mathfrak{S})$ envoyant une opérade sur son $\mathfrak{S}$-module sous-jacent. Ce foncteur admet un adjoint à gauche

$$\mathcal{T} : \mathrm{Mod}(\mathfrak{S}) \to \text{Opé}\,.$$

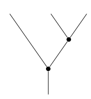
On peut décrire explicitement ce foncteur de manière combinatoire.

Définition 1.2.1. Un *arbre enraciné* est un graphe (S, A) connexe et acyclique dont on spécifie l'un des nœuds $r \in S$ appelé *racine* de l'arbre.

Un sommet $s \in S \setminus \{r\}$ est une *feuille* de l'arbre si c'est un sommet de degré égal à 1. Un sommet qui n'est pas une feuille est un *nœud intérieur*. On fait l'hypothèse supplémentaire que les nœuds intérieurs d'un arbre enraciné sont de degré au moins 3.

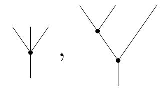
Un morphisme $f : (S, A, r) \to (S', A', r')$ entre deux arbres enracinés est une application $f : S \to S'$ tel que $f(r) = r'$ et si $\{s_1, s_2\} \in A$, alors $\{f(s_1), f(s_2)\} \in A'$. On note $\mathrm{RT}(n)$ un squelette de la catégorie des arbres enracinés à n feuilles.

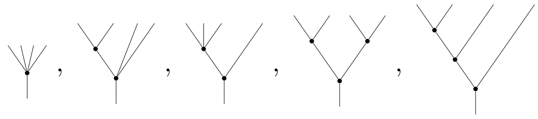
En théorie des opérades, un arbre se dessine comme ceci :



Les sommets intérieurs sont distinguées graphiquement des feuilles (on les pense comme des entrée) et on rajoute un côté fictif en dessous de la racine (on la pense comme l'opération finale donnant une sortie).

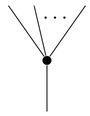
Exemples 1.2.2.

— On a $\mathrm{RT}(0) = \emptyset$, $\mathrm{RT}(1) = \emptyset$, $\mathrm{RT}(2) = \Big\{$  $\Big\}$, $\mathrm{RT}(3) = \Big\{$  $\Big\}$ et

$\mathrm{RT}(4) = \Big\{$  $\Big\}$.

Remarquez que l'arbre dessiné précédemment est bien isomorphe au deuxième arbre dans RT(3), l'isomorphisme n'étant pas nécessairement planaire.

— L'unique arbre de $\mathrm{RT}(n)$ n'ayant qu'un seul nœud interne

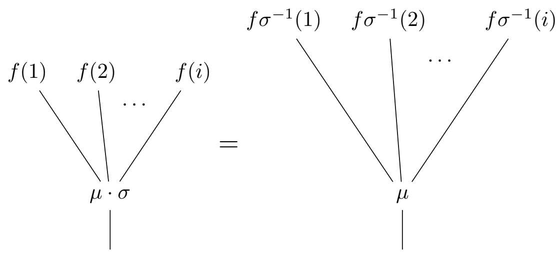


est appelé *corolle* à n feuilles.

Soit M un $\mathfrak{S}$-module tel que $M(0) = M(1) = 0$. Pour tout $t = (S, A, r) \in \mathrm{RT}(n)$ et pour tout nœud intérieur s, on note $\mathrm{in}(s)$ l'ensemble des nœud entrant de s. Si $\mathrm{in}(s)$ est de cardinal i, on pose le module coinvariant

$$M(s) := \left(\bigoplus_{f:\underline{r} \to \mathrm{in}(s)} M(i) \right)_{\mathfrak{S}_r}$$

où la somme est indexée par les bijections partant de l'ensemble $\underline{i} := \{1, \ldots, i\}$ est où l'action à droite de $\mathfrak{S}_i$ est donnée par $(f; \mu) \cdot \sigma = (f\sigma; \mu \cdot \sigma)$. Ici, on voit le nœud s comme la corolle formée par ses arrêtes adjacentes et on écrit un élément de $M(s)$ comme cette corolle dont on a étiqueté le nœud par un élément de M et les feuilles par les entrées de s dans un certain ordre de telle sorte que l'action de $\mathfrak{S}_i$ sur M et sur les feuilles soient compatibles :



Maintenant, on va étiqueter l'arbre t tout entier. Pour cela, on note $\mathrm{Int}(t)$ l'ensemble des nœuds intérieurs de t et on définit

$$M(t) := \bigotimes_{s \in \mathrm{Int}(t)} M(s).$$

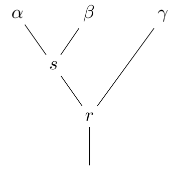
Ce produit tensoriel n'est pas bien défini en l'état puisqu'il faut préciser dans quel ordre on parcourt $\mathrm{Int}(t)$. On peut remédier à cela de deux façons équivalentes : on peut choisir un ordre total $\leqslant_t$ sur $\mathrm{Int}(t)$ pour chaque $t \in \mathrm{RT}(n)$ une bonne fois pour toute *i.e.* si t admet m sommets intérieurs

$$M(t) = M(f_t(1)) \otimes \cdots \otimes M(f_t(m))$$

où $f_t : \underline{m} \to (\mathrm{Int}(t), \leqslant_t)$ est l'unique bijection croissante possible ; ou alors, on peut faire la même chose avec tous les ordres totaux sur $\mathrm{Int}(t)$ (donc, ne faire aucun choix) et rendre le produit tensoriel commutatif *i.e.* :

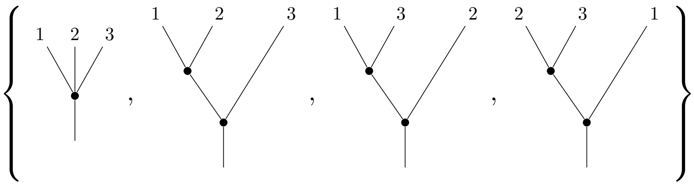
$$M(t) = \left(\bigoplus_{f:\underline{m} \to \mathrm{Int}(t)} M(f(1)) \otimes \cdots \otimes M(f(m)) \right)_{\mathfrak{S}_m}$$

où l'action de $\mathfrak{S}_m$ est donnée par $(f; \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m) \cdot \sigma = (f\sigma; \mu_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\sigma(m)})$.

Exemple 1.2.3. Si on prend $t =$  , on a $M(t) \simeq M(s) \otimes M(r)$. De plus, en choisissant un ordre total sur $\{\alpha, \beta\}$ et sur $\{s, \gamma\}$, on obtient des isomorphismes $M(s), M(r) \simeq M(2)$. Ainsi, $M(t) \simeq M(2)^{\otimes 2}$.

Définition 1.2.4. Soit X un ensemble de cardinal n. Un *arbre étiqueté par* X est un couple (t, φ) où t est un arbre enraciné à n feuilles et $\varphi : F(t) \to X$ est une bijection partant de l'ensemble des feuilles de t.

Un morphisme $f : (t, \varphi) \to (t', \psi)$ d'arbre étiquetés est un morphisme d'arbres enracinés $f : t \to t'$ tel que $\psi \circ f = \varphi$. On note $\mathrm{RT}(\underline{n})$ un squelette de la catégorie des arbre étiquetés par $\{1, \ldots, n\}$ tel que pour tout $(t, \varphi), (t', \psi) \in \mathrm{RT}(\underline{n})$, on a $(t \simeq t' \Rightarrow t = t')$.

Exemple 1.2.5. On a $\mathrm{RT}(\underline{3}) =$ .

Finalement, pour tout $n \neq 1$, on pose

$$\mathcal{T}M(n) := \bigoplus_{(t,\varphi) \in \mathrm{RT}(\underline{n})} M(t).$$

Proposition 1.2.6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\mathcal{T}M(n) \simeq \bigoplus_{t \in \mathrm{RT}(n)} \left(\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(t)|} M(t) \right).$$

Démonstration. Fixons nous un squelette $\mathrm{RT}(n)$. Pour tout $t \in \mathrm{RT}(n)$, on se fixe un étiquetage $\varphi_t : F(t) \to \underline{n}$. Pour tout $(t, \sigma) \in \mathrm{RT}(n) \times \mathfrak{S}_n$, on note $t_\sigma := (t, \sigma\varphi_t)$. Soit (t', ψ) un arbre étiqueté. Il existe alors $t \in \mathrm{RT}(n)$ et un isomorphisme d'arbres enracinés $f : t' \to t$. Cet isomorphisme induit alors une bijection $f : F(t') \to F(t)$ et un isomorphisme $f : (t', \psi) \to (t, \psi f^{-1}) = t_{\psi f^{-1} \varphi_t^{-1}}$. Ainsi, tout arbre enraciné est isomorphe à un t_σ.

Maintenant, notons que la conjugaison par φ_t est un morphisme injectif de groupes

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Int}_{\varphi_t} : & \mathrm{Aut}(t) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_t f \varphi_t^{-1} \end{array}$$

et on a $t_\sigma \simeq t_{\sigma'}$ si et seulement si $\sigma = \sigma' \in \mathfrak{S}_n / \mathrm{Im}(\mathrm{Int}_{\varphi_t})$:

$$\begin{aligned} t_\sigma \simeq t_{\sigma'} &\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(t),\ \sigma\varphi_t = \sigma'\varphi_t f \\ &\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(t),\ \sigma = \sigma' \,\mathrm{Int}_{\varphi_t}(f) \end{aligned}$$

Ainsi, si on considère une section $i : \mathfrak{S}_n / \mathrm{Im}(\mathrm{Int}_{\varphi_t}) \to \mathfrak{S}_n$ de la projection canonique, alors l'ensemble

$$\{t_{i(\gamma)} \ : \ (t, \gamma) \in \mathrm{RT}(n) \times (\mathfrak{S}_n / \mathrm{Im}(\mathrm{Int}_{\varphi_t})\}$$

est un squelette de la catégorie des arbres étiquetés vérifiant $(t \simeq t' \Rightarrow t = t')$ que l'on note alors $\mathrm{RT}(\underline{n})$. On obtient alors la formule énoncée car, pour tout $t \in \mathrm{RT}(n)$, le nombre d'arbres étiquetés ayant comme arbre enraciné sous-jacent t est

$$|\mathfrak{S}_n / \mathrm{Im}(\mathrm{Int}_{\varphi_t})| = \frac{n!}{|\mathrm{Aut}(t)|}.$$

✿

Le module $\mathcal{T}M(n)$ est un $\mathfrak{S}_n$ module à droite en posant pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$(t, \varphi; \mu) \cdot \sigma := (t, \psi; \mu')$$

où (t, ψ) est le représentant de $(t, \sigma^{-1}\varphi)$ dans $\mathrm{RT}(\underline{n})$ et où μ' est obtenu en appliquant les permutations formant l'isomorphisme $(t, \sigma^{-1}\varphi) \to (t, \psi)$ en chacun des nœuds de t correspondant.

En posant en plus $\mathcal{T}M(1) := \mathbb{K}$, on obtient un $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{T}M$. Mieux, $\mathcal{T}M$ a une structure naturelle d'opérade en définissant $(t, \varphi; \mu) \circ (a_1, \dots, a_n) =: t'$ comme l'arbre (à feuilles et nœuds étiquetés) obtenu en greffant $a_k = (t_k, \varphi_k; \mu_k)$ à la feuille $\varphi^{-1}(k)$ pour tout k (et en ne greffant rien du tout si $a_k \in \mathcal{T}M(1)$).

Les feuilles de t' sont alors naturellement étiquetées de la manière suivante. À toute feuille $F \in F(t_k)$ on associe le couple d'entiers $(k, \varphi_k(F))$ (et $(k, 1)$ si $a_k \in \mathcal{T}M(1)$). On range ces couples d'entiers par l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ce qui permet d'ordonner totalement les feuilles de l'arbre greffé. Il existe alors une unique bijection croissante $F(t') \to \underline{i_1 + \cdots + i_n}$ où i_k est le cardinal de $F(t_k)$ (égal à 1 si $a_k \in \mathcal{T}M(1)$).

Proposition 1.2.7. Pour tout $\mathfrak{S}$-module M tel que $M(0) = M(1) = 0$, l'opérade $\mathcal{T}M$ est l'opérade libre sur M *i.e.* il existe un morphisme $M \to \mathcal{T}M$ tel que tout morphisme $M \to \mathcal{P}$ à valeur dans une opérade s'y factorise de manière unique :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall"] \arrow[d] & \mathcal{P} \\ \mathcal{T}M \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On pose $i_M : M \to \mathcal{T}M$ le morphisme envoyant un élément $\mu \in M(n)$ sur $(c_n, \varphi; \mu) \in \mathcal{T}M(n)$ où c_n est la corolle à n feuilles et (c_n, φ) est l'unique corolle étiquetée dans $\mathrm{RT}(\underline{n})$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $i_M(\mu \cdot \sigma) = (c_n, \varphi; \mu \cdot \sigma) = (c_n, \varphi; \mu) \cdot \sigma = i_M(\mu) \cdot \sigma$ et donc i_M est bien un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules.

De plus, comme tout arbre s'obtient en greffant des corolles les unes sur les autres, tout élément de $\mathcal{T}M$ se décompose de manière unique comme somme de compositions d'éléments de $i_M(M)$. Ainsi, un morphisme $M \to \mathcal{P}$ s'étend naturellement et de manière unique à $\mathcal{T}M$ ✿

Exemple 1.2.8.

— Si on reprend le squelette $\mathrm{RT}(\underline{3})$ précédent, il n'y a que 3 arbre étiquetés ne possédant que des corolles à 2 feuilles. Ces trois arbre étiquetés ont comme arbre sous-jacent l'arbre t de l'exemple 1.2.3. Ainsi, on a $\mathrm{Bin}(t) = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]^{\otimes 2}$ et $\mathcal{T}\,\mathrm{Bin}(3) = 3\left(\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]^{\otimes 2}\right)$.

— De même, il y a 15 arbres formés de corolles à deux feuilles dans $\mathrm{RT}(\underline{4})$ possédant tous 3 nœuds intérieurs. Ainsi, $\mathcal{T}\,\mathrm{Bin}(4) = 15\left(\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]^{\otimes 3}\right)$.

— On définit $\mathcal{M}ag := \mathcal{T}(\mathrm{Bin})$.

— L'opérade triviale est libre : $\mathcal{V}ect = \mathcal{T}(0)$.

1.3 Présentation d'une opérade par générateurs et relations

L'opérade libre nous permet de formaliser la notion de générateurs d'une opérade.

Définition 1.3.1. Une opérade $\mathcal{P}$ est *engendrée* par un $\mathfrak{S}$-module M s'il existe un épimorphisme d'opérades

$$\mathcal{T}(M) \twoheadrightarrow \mathcal{P}\ .$$

Une *opérade binaire* est une opérade engendrée par un $\mathfrak{S}$-module de la forme $(0, 0, E, 0, 0, \dots)$.

Une *opérade de type fini* est une opérade engendrée par un $\mathfrak{S}$-module M de la forme

$$M = (E_0, E_1, \dots, E_N, 0, 0, \dots)$$

où E_n est un $\mathfrak{S}_n$-module de type fini pour tout $n \leqslant N$. On dit qu'un tel module M est un $\mathfrak{S}$-module *fini* et les générateurs des E_i sont alors aussi appelés des *générateurs* de $\mathcal{P}$.

Exemples 1.3.2.

— L'opérade triviale est engendrée par 0 et admet donc $\emptyset$ comme ensemble de générateurs.

— Toute opérade engendrée par Bin est binaire de type fini.

— L'opérade $\mathcal{C}om$ est engendrée par Bin grâce au morphisme de $\mathfrak{S}$-module $\mathrm{Bin} \to \mathcal{C}om$ envoyant $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ sur $1 \in \mathbb{K} = \mathcal{C}om(2)$ car pour tout $n \geqslant 1$, on a $1^n = 1 \in \mathbb{K} = \mathcal{C}om(n)$.

— L'opérade $\mathcal{A}ss$ est aussi engendrée par Bin grâce au morphisme $\mathrm{Bin} \to \mathcal{A}ss$ valant l'identité en arité 2 car $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ est engendré par $\mathrm{id}_n \in \mathfrak{S}_n$ qui s'écrit comme la composition d'éléments de $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ et $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_1]$:

$$\mathrm{id}_n = \mathrm{id}_2 \circ (\mathrm{id}, \mathrm{id}_{n-1}) = \mathrm{id}_2 \circ (\mathrm{id}, \mathrm{id}_2 \circ (\mathrm{id}, \cdots)).$$

Définition 1.3.3. Un sous-$\mathfrak{S}$-module $\mathcal{I}$ d'une opérade $\mathcal{P}$ est un *idéal* si pour tout $\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{P}$, on a $\mu \circ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{I}$ dès que μ ou l'un des α_i appartient à $\mathcal{I}$.

Exemple 1.3.4. Le noyau d'un morphisme d'opérades $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ (qui est bien le sous-$\mathfrak{S}$-module de $\mathcal{P}$ formé par les noyaux des composantes de f) est un idéal de $\mathcal{P}$.

Proposition 1.3.5. Si $\mathcal{I}$ est un idéal d'une opérade $\mathcal{P}$, alors le $\mathfrak{S}$-module quotient $\mathcal{P}/\mathcal{I}$ obtient naturellement une structure d'opérade vérifiant la propriété universelle attendue : pour tout morphisme d'opérades $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ tel que $\varphi(\mathcal{I}) = 0$, il existe un unique morphisme d'opérade $\overline{\varphi} : \mathcal{P}/\mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ faisant commuter la diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{Q} \\ \mathcal{P}/\mathcal{I} \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'application suivante est bien définie :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathcal{P}(n)}{\mathcal{I}(n)} \times \dfrac{\mathcal{P}(i_1)}{\mathcal{I}(i_1)} \times \cdots \times \dfrac{\mathcal{P}(i_n)}{\mathcal{I}(i_n)} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n)}{\mathcal{I}(i_1 + \cdots + i_n)} \\ (\overline{\mu}, \overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) & \longmapsto & \overline{\mu \circ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \end{array}$$

En effet, pour tout $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{I}$, on a

$$\overline{(\mu + x) \circ (\alpha_1 + x_1, \ldots, \alpha_n + x_n)} = \overline{\mu \circ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \in \frac{\mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n)}{\mathcal{I}(i_1 + \cdots + i_n)}$$

car en développant la composition par multilinéarité, on obtient le terme de droite puis une somme de termes de la forme $\beta \circ (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ avec $\beta = x$ ou $\beta_i = x_i$ pour un indice i, ce qui implique que ces autres termes sont dans l'idéal $\mathcal{I}$. De plus, cette application est multilinéaire par multilinéarité de la composition de $\mathcal{P}$. Enfin, $\mathcal{P}/\mathcal{I}$ munie de cette composition et de l'unité $\overline{\mathrm{id}}$ est bien une opérade car les axiomes d'identité, d'associativité et de symétrie passent au quotient.

Maintenant, si $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme d'opérades s'annulant sur $\mathcal{I}$, alors, par construction, l'unique morphisme de $\mathfrak{S}$-module induit $\mathcal{P}/\mathcal{I} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme d'opérades. ✿

Une intersection quelconque d'idéaux d'une opérade est encore un idéal. Ainsi, si X est un sous-ensemble d'une opérade $\mathcal{P}$, alors on définit l'idéal engendré par X :

$$(X) := \bigcap_{\substack{\mathcal{I} \text{ idéal} \\ \mathcal{I} \supset X}} \mathcal{I}.$$

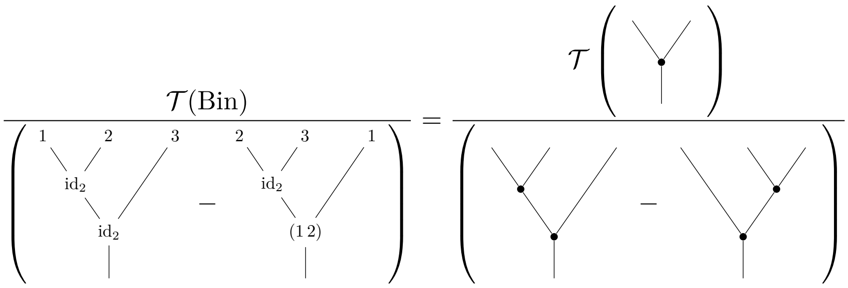
Définition 1.3.6. Une *présentation* d'une opérade $\mathcal{P}$ est la donnée d'un $\mathfrak{S}$-module M et d'un sous-ensemble $R \subset \mathcal{T}(M)$ ainsi que d'un isomorphisme

$$\mathcal{T}(M)/(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}.$$

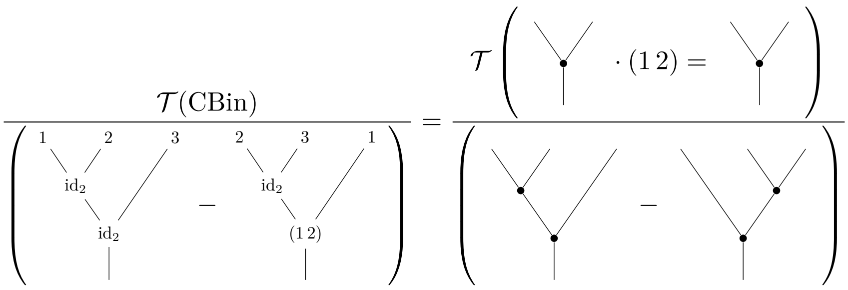
Les éléments de (R) sont appelés des *relations*. On dit qu'une telle présentation est *finie* si M est un $\mathfrak{S}$-module fini et si R est un ensemble fini.

Exemples 1.3.7.

— L'opérade $\mathcal{A}ss$ admet comme présentation finie

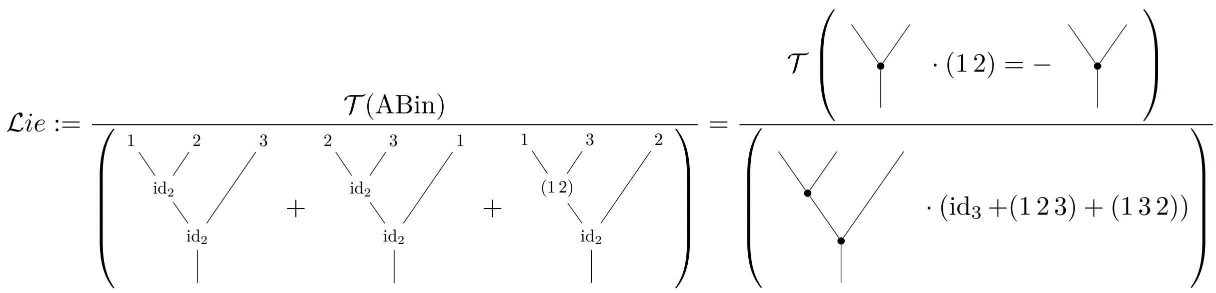


— L'opérade $\mathcal{C}om$ admet comme présentation finie



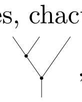
où $\mathrm{CBin} = (0, 0, \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}, 0, 0, \cdots)$ est trivial en arité 2.

— On peut définir l'opérade $\mathcal{L}ie$ par générateurs et relations :



où $\mathrm{ABin} = (0, 0, \mathrm{sgn}_2, 0, 0, \ldots)$ est la représentation signature en arité 2.

Définition 1.3.8. Une *opérade quadratique* est une opérade munie d'une présentation de la forme $\mathcal{T}(M)/(R)$ où $R \subset \mathcal{T}(M)$ n'est formée que d'arbres admettant au plus deux nœuds internes.

Notons que les arbres admettant deux nœuds internes, chacun à deux entrées, sont des arbres à 3 feuilles : il n'y en a essentiellement qu'un qui est le peigne gauche  , d'où la définition suivante.

Définition 1.3.9. Une *opérade quadratique binaire* est une opérade admettant une présentation qui est simultanément celle d'une opérade quadratique et celle d'une opérade binaire, *i.e.* c'est une opérade $\mathcal{P}$ munie d'un isomorphisme

$$\mathcal{T}(M)/(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$$

où M est concentré en arité 2 et $R \subset \mathcal{T}M(3)$.

Par la suite, nous n'étudierons que des opérades binaires quadratiques de présentation finie.

Exemples 1.3.10.

— Les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$ sont des opérades quadratiques binaires.

— Une *opérade quadratique binaire paramétrée* est une opérade de la forme

$$\frac{\mathcal{T}\left(\curlyvee\right)}{\left(\curlyvee\!\curlyvee = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \lambda_\sigma \cdot \curlyvee\!\curlyvee \cdot \sigma\right)}$$

où $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S}_3}$. Par exemple, $\mathcal{A}ss$ est une opérade quadratique binaire paramétrée par :

σ	id_3	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\lambda_\sigma^{\mathcal{A}ss}$	1	0	0	0	0	0

D'autres exemples d'opérades quadratiques binaires paramétrées seront donnés dans la section suivante.

2 Algèbre linéaire opéradique

2.1 Algèbre sur une opérade

La notion d'opérade ne va pas sans la notion d'algèbre. En effet, dans le cadre algébrique, il faut visualiser une opérade comme l'espace des opérations et axiomes définissant un type d'algèbre. Cela permet de développer une machinerie générale d'étude des algèbres qui pourra s'appliquer à de nouvelles structures algébriques étudiées dans le futur.

Définition 2.1.1. Une *algèbre sur une opérade* $\mathcal{P}$ ou encore une $\mathcal{P}$-*algèbre* est un module $A \in \mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ muni d'un morphisme d'opérades

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{E}nd_A \\ \mu &\longmapsto \mu_A \end{aligned}$$

Un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres est une application linéaire $f : A \to B$ telle que pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et pour tout $a_1, \dots, a_n \in A$, on a

$$f(\mu_A(a_1, \dots, a_n)) = \mu_B(f(a_1), \dots, f(a_n)).$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(A, B)$ l'ensemble des morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres et $\mathrm{Alg}(\mathcal{P})$ la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres.

Remarque 2.1.2. Cette définition fait intervenir l'opérade $\mathcal{E}nd_A$ que l'on ne peut pas définir si l'on étudie des opérades sur d'autres catégories monoïdales symétriques que $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$. L'avantage de $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ est en fait d'être *fermée* *i.e.* il existe un bifoncteur Hom interne donnant lieu à une adjonction « tenseur-Hom ». Il est possible d'adapter la définition précédente lorsque la catégorie de base n'est pas fermée mais notre formulation est bien utile lorsque l'opérade $\mathcal{P}$ admet une présentation par générateurs et relations.

Exemples 2.1.3.

— Au vue de la présentation donnée en exemple 1.3.7, une $\mathcal{A}ss$-algèbre est la donnée d'un module A munie d'une opération bilinéaire $\mu : (a, b) \mapsto ab$ telle que $(ab)c = a(bc)$ pour tout $a, b, c \in A$, *i.e.* c'est une algèbre associative.

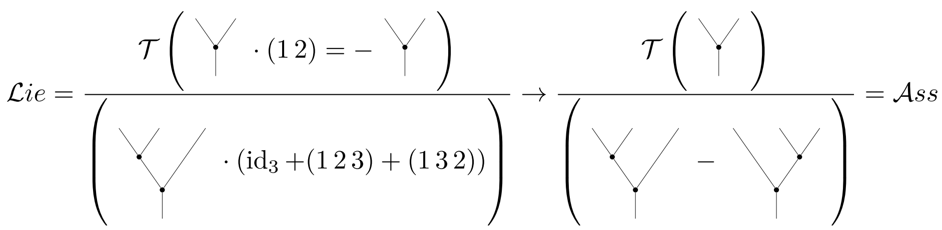
— De même, une $\mathcal{C}om$-algèbre est une algèbre commutative et une $\mathcal{L}ie$-algèbre est une algèbre de Lie (sauf en caractéristique 2).

— Une algèbre sur $u\mathcal{C}om$ est une algèbre commutative unitaire et une algèbre sur $u\mathcal{A}ss$ est une algèbre associative unitaire.

Au vue de la définition précédente, la donnée d'un morphisme d'opérades $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ induit un foncteur $f^* : \mathrm{Alg}(\mathcal{Q}) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{P})$ donné par la pré-composition par f. Par exemple, le morphisme

$$\mathcal{A}ss = (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2], \dots) \to (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}, \mathbb{K}, \dots) = \mathcal{C}om$$

donné par le morphisme d'augmentation $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{K}$ envoyant $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sur $1 \in \mathbb{K}$, induit le foncteur d'oubli $\mathrm{Alg}(\mathcal{C}om) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{A}ss)$. De même, le morphisme d'opérades



envoyant  sur  $-$  $\cdot (1\,2)$ est bien défini est induit le foncteur d'oublie $\mathrm{Alg}(\mathcal{A}ss) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{L}ie)$.

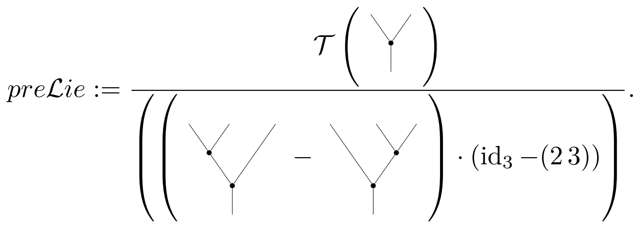
On se propose maintenant de faire une liste de différentes notions d'algèbres réalisées par des opérades.

Définition 2.1.4. Une *algèbre pré-Lie* est un $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{g}$ muni d'une opération bilinéaire $\{-, -\}$ tel que pour tout $a, b, c \in A$, on a

$$\{\{a, b\}, c\} - \{a, \{b, c\}\} = \{\{a, c\}, b\} - \{a, \{c, b\}\}$$

i.e l'associateur est symétrique à droite.

Une algèbre pré-Lie est donc une algèbre sur l'opérade quadratique binaire



On dispose d'un morphisme d'opérades $\mathcal{L}ie \to pre\mathcal{L}ie$ envoyant  sur  $-$  $\cdot (1\,2)$. Il induit un foncteur $\mathrm{Alg}(pre\mathcal{L}ie) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{L}ie)$ qui associe à toute algèbre pré-Lie $(\mathfrak{g}, \{-,-\})$ l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [-,-])$ où $[-,-]$ est l'antisymétrisée de $\{-,-\}$.

Définition 2.1.5. Une *algèbre de Leibniz* (à gauche) est un $\mathbb{K}$-module L muni d'une opération bilinéaire $[-,-]$ telle que pour tout $a, b, c \in L$, on a

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]].$$

Remarque 2.1.6. Le nom « algèbre de Leibniz » provient du fait que la relation donnée est équivalente au fait que $[a,-]$ soit une dérivation.

Une algèbre de Leibniz est donc une algèbre sur l'opérade quadratique binaire $\mathcal{L}eib$ paramétrée par :

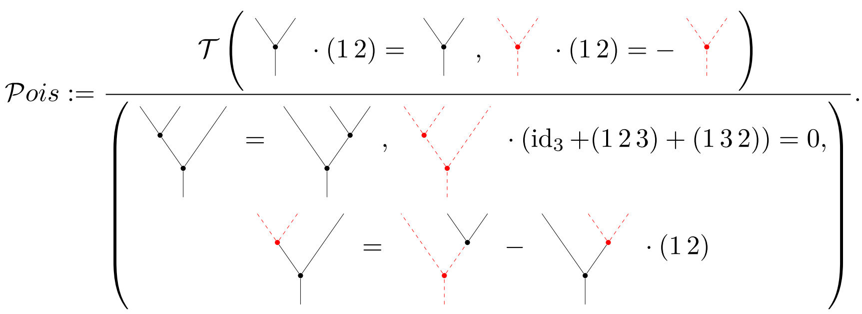
σ	id_3	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\lambda_\sigma^{\mathcal{L}eib}$	1	-1	0	0	0	0

On dispose d'un morphisme d'opérades $\mathcal{L}eib \to \mathcal{L}ie$ envoyant  sur  induisant le foncteur d'oubli $\mathrm{Alg}(\mathcal{L}ie) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{L}eib)$ consistant à oublier la relation d'antisymétrie d'un crochet de Lie.

Définition 2.1.7. Une *algèbre de Poisson* (à gauche) est un $\mathbb{K}$-module A muni d'une opération commutative $- \cdot -$ et d'un crochet de Lie $[-,-]$ tels que pour tout $a, b, c \in A$, on a

$$[a, b \cdot c] = [a,b] \cdot c + b \cdot [a,c].$$

Une algèbre de Poisson est donc une algèbre sur l'opérade quadratique binaire



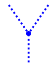
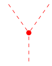
Cette présentation de l'opérade $\mathcal{P}ois$ peut être réduite si $2, 3 \in \mathbb{K}^\times$ (cette réduction apparaît à l'origine dans [MR06]). En effet, $\mathcal{P}ois$ est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module

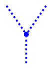
$$\mathrm{CBin} \oplus \mathrm{ABin} = (0, 0, \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{sgn}_2, 0, \dots).$$

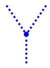
Or, on a $\mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{sgn}_2 = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ en décomposant un élément $v \in \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} v \cdot (\mathrm{id}_2 + (1\,2)) + \frac{1}{2} v \cdot (\mathrm{id}_2 - (1\,2)).$$

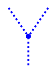
Ainsi, on a $\mathrm{CBin} \oplus \mathrm{ABin} = \mathrm{Bin}$ et donc $\mathcal{T}(\mathrm{CBin} \oplus \mathrm{ABin}) = \mathcal{T}(\mathrm{Bin}) = \mathcal{M}ag$.

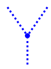
Opéradiquement, cela se traduit par le fait qu'en posant  :=  +  , on a

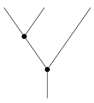
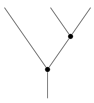
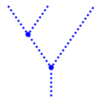
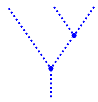
 $= \frac{1}{2}$  $\cdot (\mathrm{id}_2 + (1\,2))$

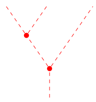
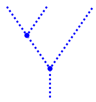
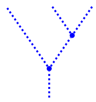
 $= \frac{1}{2}$  $\cdot (\mathrm{id}_2 - (1\,2))$

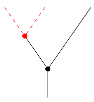
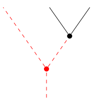
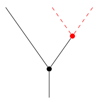
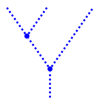
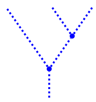
si bien que

$\mathcal{T}\Big($  $\cdot (1\,2) =$  ,  $\cdot (1\,2) = -$  $\Big) = \mathcal{T}\Big($  $\Big)$.

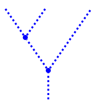
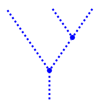
Les relations définissant $\mathcal{P}ois$ peuvent alors se réécrire en fonction de l'opération  :

 $-$  $= \frac{1}{4}\Big($  $\cdot (\mathrm{id}_3 + (1\,2) - (1\,3) - (1\,3\,2))$ $-$  $\cdot (\mathrm{id}_3 + (2\,3) - (1\,3) - (1\,2\,3))\Big) \quad =: v_1$

 $\cdot (\mathrm{id}_3 + (1\,2\,3) + (1\,3\,2)) = \frac{1}{4}\Big($  $-$  $\Big) \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma \quad =: v_2$

 $-$  $+$  $\cdot (1\,2) = \frac{1}{4}\Big($  $-$  $\Big) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id}_3 - (1\,2) + (2\,3) + (1\,3) \\ -(1\,2\,3) + (1\,3\,2) \end{pmatrix} \quad =: v_3$

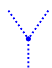
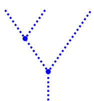
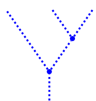
Posons maintenant $v := \frac{1}{6}(2v_1 + v_2 + v_3 + 2v_3 \cdot (1\,2\,3))$ (*cf.* [Rem24] pour comprendre comment à été trouvée cette expression). On a alors, en développant :

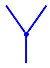
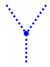
$v =$  $\cdot \left(\mathrm{id}_3 + \frac{1}{3}((1\,2) - (2\,3) + (1\,2\,3) - (1\,3\,2))\right) -$ 

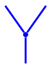
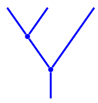
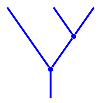
Cette nouvelle relation est dans l'idéal (v_1, v_2, v_3) définissant $\mathcal{P}ois$ mais, réciproquement, on a aussi :

$$\begin{cases} v_1 = v \cdot \frac{1}{4}(\mathrm{id}_3 + (2\,3) - (1\,3) - (1\,2\,3)) \\ v_2 = v \cdot \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\sigma \\ v_3 = v \cdot \frac{1}{4}(\mathrm{id}_3 - (1\,2) + (2\,3) + (1\,3) - (1\,2\,3) + (1\,3\,2)) \end{cases}$$

Ainsi, v_1, v_2 et v_3 sont dans l'idéal engendré par v et $\mathcal{P}ois$ admet une présentation à un générateur et une relation :

$\mathcal{P}ois = \mathcal{T}\Big($  $\Big) \Big/ \Big($  $\cdot \left(\mathrm{id}_3 + \frac{1}{3}((1\,2) - (2\,3) + (1\,2\,3) - (1\,3\,2))\right) =$  $\Big)$

De plus, en considérant le générateur opposé  $:=$  $\cdot\,(1\,2)$, on obtient la présentation suivante :

$\mathcal{P}ois = \mathcal{T}\Big($  $\Big)$ / $\Big($  $=$  $\cdot \left(\mathrm{id}_3 + \frac{1}{3}((2\,3) - (1\,2) + (1\,3\,2) - (1\,2\,3))\right)\Big)$

Ainsi, $\mathcal{P}ois$ est paramétrée par :

σ	id_3	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\lambda_\sigma^{\mathcal{P}ois}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On voit donc à travers ces exemples que la notion d'opérade permet de capturer toutes les algèbres définies par des axiomes multilinéaires. On peut en fait faire mieux. Par exemple, les algèbres de Jordan sont des espaces vectoriels munis d'une opération binaire symétrique vérifiant la relation suivante

$$a^2(ba) = (a^2b)a$$

qui n'est pas une formule multinlinéaire. Elle peut néanmoins être multilinéarisée, si la caractéristique du corps de base le permet (*cf.* paragraphe 2.4.3. dans [HS84]), en la relation

$$(ab)(cd) + (ad)(cb) + (bd)(ca) = (((ab)c)d) + (((ad)c)b) + (((bd)c)a)$$

si bien que la catégorie des algèbres de Jordan se réalise aussi comme une catégorie d'algèbres sur une opérade.

Proposition 2.1.8. Soit $\mathcal{P}$ une opérade et A une $\mathcal{P}$-algèbre. La catégorie $\mathrm{Alg}(\mathcal{P})$ admet les produits fibrés par A

Démonstration. Soit $\pi_B : B \to A$ et $\pi_C : C \to A$ deux morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres. On munit le produit fibré de $\mathbb{K}$-modules $B \times_A C = \{(b,c) \in B \times C \,|\, \pi_B(b) = \pi_C(c)\}$ d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre par

$$\mu_{B\times_A C}((b_1,c_1),\ldots,(b_n,c_n)) := (\mu_B(b_1,\ldots,b_n), \mu_C(c_1,\ldots,c_n)).$$

Le résultat vit bien dans $B \times_A C$ car π_B et π_C sont des morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres et, par construction, les projections $B \times_A C \to B$ et $B \times_A C \to C$ sont des morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres.

Montrons maintenant que $B \times_A C$ a la bonne propriété universelle. Soit D une $\mathcal{P}$-algèbre et $f : D \to B$ et $g : D \to C$ des morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres tels que $\pi_B \circ f = \pi_C \circ g$. Supposons qu'il existe un morphisme $h : D \to B \times_A C$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& B \times_A C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "\pi_C"] \\
& B \arrow[r, "\pi_B"'] & A
\end{tikzcd}$$

Alors, par propriété universelle, h est l'unique application $\mathbb{K}$-linéaire faisant commuter le diagramme. Réciproquement, cette application est automatiquement un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres car f et g en sont :

$$\begin{aligned}
h(\mu_D(d_1,\ldots,d_n)) &= (f(\mu_D(d_1,\ldots,d_n)), g(\mu_D(d_1,\ldots,d_n))) \\
&= (\mu_B(f(d_1),\ldots,f(d_n)), \mu_C(g(d_1),\ldots,g(d_n))) \\
&= \mu_{B\times_A C}((f(d_1),g(d_1)),\ldots,(f(d_n),g(d_n))) \\
&= \mu_{B\times_A C}(h(d_1),\ldots,h(d_n)).
\end{aligned}$$

✿

2.2 Module opéradique sur une algèbre

Les notions habituelles de modules sur les différents types d'algèbre (module sur une algèbre commutative, bimodule sur une algèbre associative, module sur une algèbre de Lie) peuvent se formaliser dans le langage opéradique en une notion unifiée de module. Ce sont notamment ces modules qui sont utilisés comme coefficients dans la cohomologie d'André-Quillen.

Définition 2.2.1. Soit $A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{P})$ et $M \in \mathrm{Mod}(\mathbb{K})$. Le $\mathfrak{S}$-module des *actions de A sur M* est défini par

$$\mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}(n) := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes i-1} \otimes M \otimes A^{\otimes n-i}, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A^{\otimes i-1} \otimes M \otimes A^{\otimes n-i}, M\right)$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit à droite par permutation des entrées, *i.e.* $(f \cdot \sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)})$.

Une structure de *A-module* sur M est la donnée d'un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon} \\ \mu \in \mathcal{P}(n) & \longmapsto & \mu_M = (\mu^i_M : A^{\otimes i-1} \otimes M \otimes A^{\otimes n-i} \to M)_{1 \leqslant i \leqslant n} \end{array}$$

tel que $\mathrm{id}^1_M = \mathrm{id}_M$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$(\mu \circ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))^i_M = \mu^j_M \circ (\alpha_{1A} \otimes \cdots \otimes \alpha^k_{jM} \otimes \cdots \alpha_{nA}) \tag{1}$$

où $\alpha_l \in \mathcal{P}(i_l)$ et j et k sont les indices tels que $i = i_1 + \cdots + i_{j-1} + k$.

Un morphisme de A-modules $f : M \to N$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire telle que pour tout $\mu \in \mathcal{P}$, on a

$$f(\mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)) = \mu^i_N(a_1, \ldots, f(x), \ldots, a_n)$$

pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $x \in M$. On notera $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ la catégorie des A-modules.

La condition (1) dans la définition précédente est une adaptation « infinitésimal » de la notion de morphisme d'opérades. En fait, il y a bien une opérade cachée et elle permet de formaliser la donnée conjointe d'une $\mathcal{P}$-algèbre et d'un module sur cette algèbre.

Définition 2.2.2. L'opérade $\mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$ est le $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{E}nd_A \oplus \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$ ayant $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_M)$ pour identité et dont la loi de composition est définie par

$$\mu \circ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \left(\mu_A \circ (\alpha_{1A}, \ldots, \alpha_{nA}), \left(\mu^{j_i}_M \circ (\alpha_{1A} \otimes \cdots \otimes \alpha^{k_i}_{j_i M} \otimes \cdots \alpha_{nA})\right)_{1 \leqslant i \leqslant i_1 + \cdots + i_n}\right)$$

où $\mu = (\mu_A, (\mu^i_M)_i) \in \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}(n)$, $\alpha_l = (\alpha_{lA}, (\alpha^k_{lM})_k) \in \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}(i_l)$ et où les indices j_i et k_i sont les indices tels que $i = i_1 + \cdots + i_{j_i - 1} + k_i$.

Proposition 2.2.3. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon} & \hookrightarrow & \mathcal{E}nd_{A \oplus M} \\ \mu = \left(\mu_A, (\mu^i_M)_i\right) & \longmapsto & \mu_{A \oplus M} \end{array}$$

avec

$$\mu_{A \oplus M}((a_1, x_1), \ldots, (a_n, x_n)) := \left(\mu_A(a_1, \ldots, a_n), \sum_{i=1}^{n} \mu^i_M(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)\right),$$

est un morphisme injectif de $\mathfrak{S}$-modules préservant la loi de composition et l'identité ce qui justifie le fait que $\mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$ soit bien une opérade. Ce morphisme est alors un morphisme d'opérades.

Démonstration. C'est bien un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules : la $\mathbb{K}$-linéarité est clair et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}
(\mu_{A\oplus M}\cdot\sigma)((a_1,x_1)\dots(a_n,x_n)) &= \mu_{A\oplus M}\left((a_{\sigma^{-1}(1)},x_{\sigma^{-1}(1)}),\dots,(a_{\sigma^{-1}(n)},x_{\sigma^{-1}(n)})\right)\\
&= \left(\mu_A\left(a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,a_{\sigma^{-1}(n)}\right), \sum_{i=1}^n \mu_M^i\left(a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(i)},\dots,a_{\sigma^{-1}(n)}\right)\right)\\
&= \left((\mu\cdot\sigma)_A(a_1,\dots,a_n), \sum_{i=1}^n (\mu\cdot\sigma)_M^{\sigma^{-1}(i)}(a_1,\dots,x_{\sigma^{-1}(i)},\dots,a_n)\right)\\
&= \left((\mu\cdot\sigma)_A(a_1,\dots,a_n), \sum_{i=1}^n (\mu\cdot\sigma)_M^{i}(a_1,\dots,x_{i},\dots,a_n)\right)\\
&= (\mu\cdot\sigma)_{A\oplus M}((a_1,x_1)\dots(a_n,x_n)).
\end{aligned}$$

Il est injectif car si $\mu_{A\oplus M}=0$, alors $\mu=0$ car on a $\mu_A=0$ en regardant la première coordonnée des évaluations de $\mu_{A\oplus M}$ et $\mu_M^i=0$ en regardant la seconde coordonnées de $\mu_{A\oplus M}((a_1,0),\dots,(a_i,x_i),\dots,(a_n,0))$.

La préservation de l'identité est due au fait que $\mathrm{id}_{A\oplus M}=\mathrm{id}_A\oplus\mathrm{id}_M$. Enfin, elle préserve la composition car pour n opérations $\alpha_j\in\mathcal{E}nd_A\ltimes\mathrm{End}_{M,\varepsilon}^A(i_j)$, on note $I_j:=i_1+\cdots+i_j$ et on a

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\oplus M}\circ(\alpha_{1A\oplus M},\dots,\alpha_{nA\oplus M})((a_1,x_1),\dots(a_{I_n},x_{I_n}))\\
=&\left(\begin{matrix}\mu_A\circ(\alpha_{1A},\dots,\alpha_{nA})(a_1,\dots,a_{I_n}),\\ \sum_{j=1}^n\mu_M^j\left(\alpha_{1A}(a_1,\dots,a_{I_1}),\dots,\sum_{k=1}^{i_j}\alpha_{jM}^k(a_{I_{j-1}+1},\dots,x_{I_{j-1}+k},\dots,a_{I_j}),\dots,\alpha_{nA}(a_{I_{n-1}+1},\dots,a_{I_n})\right)\end{matrix}\right)\\
=&\left(\begin{matrix}\mu_A\circ(\alpha_{1A},\dots,\alpha_{nA})(a_1,\dots,a_{I_n}),\\ \sum_{i=1}^{I_n}\mu_M^{j_i}\left(\alpha_{1A}(a_1,\dots,a_{I_1}),\dots,\alpha_{j_iM}^{k_i}(a_{I_{j_i-1}+1},\dots,x_{I_{j_i-1}+k_i},\dots,a_{I_{j_i}}),\dots,\alpha_{nA}(a_{I_{n-1}+1},\dots,a_{I_n})\right)\end{matrix}\right)\\
=&\left(\begin{matrix}\mu_A\circ(\alpha_{1A},\dots,\alpha_{nA})(a_1,\dots,a_{I_n}),\\ \sum_{i=1}^{I_n}\left(\mu_M^{j_i}\circ\left(\alpha_{1A}\otimes\cdots\otimes\alpha_{j_iM}^{k_i}\otimes\cdots\otimes\alpha_{nA}\right)\right)(a_1,\dots,x_i,\dots,a_{I_n})\end{matrix}\right)\\
=&(\mu\circ(\alpha_1,\dots,\alpha_n))_{A\oplus M}((a_1,x_1),\dots(a_{I_n},x_{I_n})).
\end{aligned}$$

✿

En comparant la condition (1) à la composition dans $\mathcal{E}nd_A\ltimes\mathrm{End}_{M,\varepsilon}^A$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.2.4. Soit $\mathcal{P}$ une opérade et $A, M\in\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$.

(i) La donnée d'un morphisme d'opérades $\mathcal{P}\to\mathcal{E}nd_A\ltimes\mathrm{End}_{M,\varepsilon}^A$ est équivalente à la donnée conjointe d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur A ainsi que d'une structure de A-module sur M.

(ii) Si A est une $\mathcal{P}$-algèbre de morphisme structurel $\varphi_A:\mathcal{P}\to\mathcal{E}nd_A$, alors une structure de A-module sur M est équivalente à la donnée d'un morphisme d'opérades $\varphi:\mathcal{P}\to\mathcal{E}nd_A\ltimes\mathrm{End}_{M,\varepsilon}^A$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{E}nd_A\ltimes\mathrm{End}_{M,\varepsilon}^A \arrow[dr, "\mathrm{pr}"] & \\
\mathcal{P} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\varphi_A"'] & & \mathcal{E}nd_A
\end{tikzcd}$$

Exemples 2.2.5.

— Grâce aux présentations données en exemples 1.3.7, on voit qu'un module sur une algèbre commutative est la donnée d'un module à gauche sur cette algèbre dans le sens habituel.

— De même, un module sur une algèbre associative est la donnée d'un bimodule sur cette algèbre.

— Un module sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module M et d'une action $\mathfrak{g}\otimes M\to M$ (avec la convention $x\cdot g:=-g\cdot x$) telle que

$$(x\cdot g)\cdot h+[g,h]\cdot x+(h\cdot x)\cdot g=0.$$

Cette notion correspond bien à la notion habituelle de module sur une algèbre de Lie puisque la relation précédente est équivalente à

$$[g,h]\cdot x = g\cdot(h\cdot x) - h\cdot(g\cdot x).$$

— Un bimodule sur une algèbre de Leibniz L est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module M et d'une action à gauche $L\otimes M \to M$ d'une action à droite $M\otimes L \to M$ telles que

$$\begin{cases} [a,b]\cdot x = a\cdot(b\cdot x) - b\cdot(a\cdot x) \\ x\cdot[a,b] = (x\cdot a)\cdot b + a\cdot(x\cdot b) \\ (a\cdot x)\cdot b = a\cdot(x\cdot b) - x\cdot[a,b] \end{cases}$$

— Un module sur une algèbre de Poisson est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module M et de deux actions $-\cdot-, \{-,-\} : A\otimes M \to M$ telles que

  — $(M, -\cdot-)$ est un module sur l'algèbre commutative sous-jacente de A ;

  — $(M, \{-,-\})$ est un module sur l'algèbre de Lie sous-jacente de A ;

  — et on a les relations suivantes $\begin{cases} \{ab,x\} = a\cdot\{b\cdot x\} + b\cdot\{a,x\} \\ [a,b]\cdot x = \{a, b\cdot x\} - b\cdot\{a,x\} \end{cases}$.

De manière générale, les catégories de modules opéradiques se comportent aussi bien que des catégories de modules à gauche sur une $\mathbb{K}$-algèbre (en fait, elles sont toutes isomorphes à de telles catégories *cf.* section 3.1).

Par exemple, si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres, alors on a un foncteur de restriction des scalaires

$$f^* : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(B) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$$

en posant pour tout B-module M :

$$\mu^i_{M^f}(a_1,\dots,x\dots,a_n) := \mu^i_M(f(a_1),\dots,x,\dots,f(a_n)).$$

Ce foncteur admet un adjoint à gauche $f_! : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(B)$ correspondant alors à une extension des scalaires (*cf.* proposition 2.2.8).

On dispose aussi d'un foncteur d'oubli $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ et ce foncteur admet un adjoint à gauche

$$F_A : \mathrm{Mod}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A).$$

Le A-module $F_A(V)$ est alors appelé le *A-module libre* engendré par V. La construction de $F_A(V)$ est faite explicitement dans [LV12] (partie 12.3.5) et nous en reprenons ici l'essentiel.

On se donne donc un $\mathbb{K}$-module V et on pose

$$\mathcal{P}(A;V) := \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{P}(n)\otimes_{\mathfrak{S}_n}\left(\bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)}\right)$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche sur $\bigoplus_i A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)}$ par permutation des facteurs. On notera $\mu^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ l'image dans $\mathcal{P}(A;V)$ de l'élément $\mu\otimes a_1\otimes\cdots\otimes x\otimes\cdots\otimes a_n \in \mathcal{P}(n)\otimes A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)}$ par la composition de morphismes canoniques

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(n)\otimes A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \mathcal{P}(n)\otimes\left(\bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)}\right) \arrow[d] \\
\mathcal{P}(A;V) & \mathcal{P}(n)\otimes_{\mathfrak{S}_n}\left(\bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)}\right) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

On définit alors $F_A(V)$ comme le $\mathbb{K}$-module quotient

$$\frac{\mathcal{P}(A;V)}{\begin{pmatrix} (\mu\circ(\alpha_1,\dots,\alpha_n))^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_{I_n}) \\ =(\mu\circ(\mathrm{id},\dots,\alpha_j,\dots,\mathrm{id}))^{j-1+k}\otimes(\alpha_{1A}(a_1,\dots,a_{I_1}),\dots,a_{I_{j-1}+1},\dots,x,\dots,a_{I_j},\dots,\alpha_{nA}(a_{I_{n-1}+1},\dots,a_{I_n})) \end{pmatrix}}$$

où $\mu\in\mathcal{P}(n)$, $\alpha_l\in\mathcal{P}(i_l)$, $I_l = i_1+\cdots+i_l$ et les indices j et k sont tels que $i = I_{j-1}+k$.

On munit $F_A(V)$ d'une structure de A-module en posant

$$\begin{aligned}&\mu^i_{F_A(V)}\left(a_1,\dots,\beta^k\otimes(b_1,\dots,x,\dots,b_m),\cdots,a_n\right)\\ :=&(\mu\circ(\mathrm{id},\dots,\beta,\dots\mathrm{id}))^{i-1+k}\otimes(a_1,\dots,b_1,\dots,x,\dots,b_m,\dots,a_n)\end{aligned}$$

La relation imposée sur $\mathcal{P}(A;V)$ dans la définition de $F_A(V)$ assure que l'expression précédente définit bien une structure de A-module sur $F_A(V)$.

De plus, si $f : V \to W$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire, alors l'application $f_* : F_A(V) \to F_A(W)$ envoyant $\mu^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ sur $\mu^i\otimes(a_1,\dots,f(x),\dots,a_n)$ est bien définie et est un morphisme de A-modules de telle sorte que $F_A : \mathrm{Mod}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ soit un foncteur.

Théorème 2.2.6. Soit M un A-module et V un $\mathbb{K}$-module. On a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(F_A(V),M)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,M)$$

si bien que le foncteur F_A est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)\to\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Dans un sens, on associe à un morphisme de A-modules $\varphi : F_A(V) \to M$ l'application linéaire $\psi : V \to M$ envoyant x sur $\varphi(\mathrm{id}\otimes x)$. Dans l'autre, on associée à une application linéaire $\psi : V \to M$ le morphisme de A-modules $\varphi : F_A(V) \to M$ envoyant $\mu^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ vers $\mu^i_M(a_1,\dots,\psi(x),\dots,a_n)$.

L'application φ est bien définie sur $\mathcal{P}(A;V)$ car $\mu^i_M(a_1,\dots,\psi(x),\dots,a_n)$ est une expression $\mathbb{K}$-linéaire en μ, en les a_i ainsi qu'en x et est compatible avec l'action de $\mathfrak{S}_n$ car on a

$$(\mu\cdot\sigma)^i_M(a_1,\dots,\psi(x),\dots,a_n)=\mu^{\sigma(i)}_M(a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\psi(x),\dots,a_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Elle passe alors bien au quotient en un morphisme $F_A(V)\to M$ car

$$\begin{aligned}&\varphi\left((\mu\circ(\alpha_1,\dots,\alpha_n))^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_{I_n})\right)\\ =&(\mu\circ(\alpha_1,\dots,\alpha_n))^i_M(a_1,\dots,\psi(x),\dots,a_{I_n})\\ =&(\mu\circ(\mathrm{id},\dots,\alpha_j,\dots,\mathrm{id}))^{j-1+k}_M\left(\alpha_{1A}(a_1,\dots,a_{I_1}),\dots,a_{I_{j-1}+1},\dots,\psi(x),\dots,a_{I_j},\dots,\alpha_{nA}(a_{I_{n-1}+1},\dots,a_{I_n})\right)\\ =&\varphi\left((\mu\circ(\mathrm{id}\dots,\alpha_j,\dots,\mathrm{id}))^{j-1+k}\otimes\left(\alpha_{1A}(a_1,\dots,a_{I_1}),\dots,a_{I_{j-1}+1},\dots,x,\dots,a_{I_j},\dots,\alpha_{nA}(a_{I_{n-1}+1},\dots,a_{I_n})\right)\right)\end{aligned}$$

et c'est bien un morphisme de A-modules car

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\mu^i_{F_A(V)}\left(a_1\dots,\beta^k\otimes(b_1\dots,x,\dots,b_m),\dots,a_n\right)\right)\\ =&\varphi\left((\mu\circ(\mathrm{id},\dots,\beta\dots,\mathrm{id}))^{i-1+k}\otimes(a_1,\dots,b_1,\dots,x\dots,b_m\dots,a_n)\right)\\ =&(\mu\circ(\mathrm{id},\dots,\beta,\dots,\mathrm{id}))^{i-1+k}_M(a_1,\dots,b_1,\dots,\psi(x),\dots,b_m,\dots,a_n)\\ =&\mu^i_M(a_1,\dots,\beta^k_M(b_1,\dots,\psi(x),\dots,b_m),\dots,a_n)\\ =&\mu^i_M(a_1,\dots,\varphi(\beta^k\otimes(b_1,\dots,x,\dots,b_m)),\dots,a_n).\end{aligned}$$

Les applications $\varphi\mapsto\psi$ et $\psi\mapsto\varphi$ forment alors des bijections réciproques car si on se donne $\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,M)$, alors on a $\varphi(\mathrm{id}\otimes x)=\mathrm{id}^1_M(\psi(x))=\mathrm{id}_M(\psi(x))=\psi(x)$ et si on se donne $\varphi\in\mathrm{Hom}_A(F_A(V),M)$, alors on a

$$\begin{aligned}\mu^i_M(a_1,\dots,\psi(x),\dots,a_n)=&\mu^i_M(a_1,\dots,\varphi(\mathrm{id}\otimes x),\dots,a_n)\\ =&\varphi(\mu^i_{F_A(V)}(a_1,\dots,\mathrm{id}\otimes x,\dots,a_n))\\ =&\varphi\left((\mu\circ(\mathrm{id},\dots,\mathrm{id}))^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_n)\right)\\ =&\varphi\left(\mu^i\otimes(a_1,\dots,x,\dots,a_n)\right).\end{aligned}$$

✿

La catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ est $\mathbb{K}$-linéaire car une combinaison linéaire de morphismes de A-modules et un morphisme de A-modules et la bijection précédente est en fait un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire. On utilisera la structure de $\mathbb{K}$-module de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ dans la section 3.1.

Proposition 2.2.7. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ des A-modules opéradiques est une catégorie abélienne.

Démonstration. Comme $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ est une catégorie pré-additive, on peut montrer qu'elle est additive en montrant qu'elle admet les produits finis *i.e.* qu'elle admet un objet final ainsi que les produits $M \times N$ de deux A-modules. Le $\mathbb{K}$-module nul 0 est naturellement un A-module car $\mathrm{End}_{0,\varepsilon}^A = 0$ et $\mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}_{M,\varepsilon}^A = \mathcal{E}nd_A$, donc la structure de $\mathcal{P}$-algèbre de A se traduit en une structure de A-module sur 0. Les applications $\mathbb{K}$-linéaires $M \to 0$ sont alors automatiquement A-linéaires et 0 est l'objet final de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$.

Pour les biproduits, le $\mathbb{K}$-module produit $M \times N$ admet naturellement une structure de A-module en fait agir A diagonalement : $\mu^i_{M\times N}(a_1, \ldots, (m, n), \ldots, a_n) := (\mu^i_M(a_1, \ldots, m, \ldots, a_n), \mu^i_N(a_1, \ldots, n, \ldots, a_n))$. Les projections $M \times N \to M$ et $M \times N \to N$ sont alors des morphismes de A-modules et $M \times N$ a la propriété universelle recherchée car si $f : L \to M$ et $g : L \to N$ sont des morphismes de A-modules, alors l'application $\mathbb{K}$-linéaire $(f, g) : L \to M \times N$ est automatiquement un morphisme de A-modules.

De plus, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ est pré-abélienne car le noyau d'un morphisme de A-modules $f : M \to N$ est un sous-A-module de M et il existe une unique structure de A-module sur son conoyau (dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$) de telle sorte que la projection $N \to \mathrm{coKer}(f)$ soit un morphisme de A-modules. Encore une fois, les A-modules $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{coKer}(f)$ ont alors les bonnes propriétés universelles.

Enfin, pour tout morphisme de A-modules $f : M \to N$ le morphisme naturel $\overline{f} : \mathrm{coIm}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules, donc il admet un inverse $\overline{f}^{-1}$ est l'inverse d'un morphisme de A-modules bijectif étant automatiquement un morphisme de A-modules, $\overline{f}$ est un isomorphisme de A-modules et $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ est abélienne. ✿

Le foncteur libre F_A nous permet de construire l'extension des scalaires dans le cadre opéradique. En effet, si on a un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres $f : A \to B$ et un A-module M, alors on définit $f_!(M)$ par le B-module quotient

$$M_f := \frac{F_B(M)}{\left(\mu^i \otimes (f(a_1), \ldots, x, \ldots, f(a_n)) = \mathrm{id}^1 \otimes \mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)\right)}$$

Cette construction est alors fonctorielle car si $\varphi : M \to N$ est un morphisme de A-modules, alors le morphisme $\varphi_* : F_B(M) \to N_f$ induit un morphisme $\varphi_f : M_f \to N_f$ car

$$\begin{aligned}\varphi_*(\mu^i \otimes (f(a_1), \ldots, x, \ldots, f(a_n)) &= \mu^i \otimes (f(a_1), \ldots, \varphi(x), \ldots, f(a_n))\\ &= \mathrm{id}^1 \otimes \mu^i_N(a_1, \ldots, \varphi(x), \ldots, a_n)\\ &= \mathrm{id}^1 \otimes \varphi(\mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n))\\ &= \varphi_*(\mathrm{id}^1 \otimes \mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)).\end{aligned}$$

Proposition 2.2.8. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(A, B)$, $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ et $N \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(B)$. On a un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire naturel

$$\mathrm{Hom}_A\left(M, N^f\right) \simeq \mathrm{Hom}_B\left(M_f, N\right)$$

si bien que le foncteur d'extension des scalaires $f_!$ est adjoint à gauche à la restriction des scalaires f^*.

Démonstration. Un morphisme B-linéaire $\varphi : M_f \to N$ correspond par propriété universelle du quotient à un morphisme de B-modules $\varphi : F_B(M) \to N$ tel que

$$\varphi(\mu^i \otimes (f(a_1), \ldots, x, \ldots, f(a_n)) = \varphi(\mathrm{id}^1 \otimes \mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n))$$

et un tel morphisme correspond par adjonction libre-oublie à une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : M \to N$ telle que

$$\mu^i_N(f(a_1), \ldots, \varphi(x), \ldots, f(a_n) = \varphi(\mu^i_M(a_1, \ldots, x \ldots, a_n))$$

i.e. à un morphisme de A-modules $\varphi : M \to N^f$. Cette correspondance est linéaire et naturelle car elle provient de l'adjonction libre-oublie d'une part, et de la pré-composition par la projection linéaire $F_B(M) \to M_f$ d'autre part. ✿

On a donc vu que la notion de module opéradique était fonctorielle vis-à-vis de la $\mathcal{P}$-algèbre A, mais elle en fait aussi fonctorielle vis-à-vis de l'opérade $\mathcal{P}$ elle-même.

Proposition 2.2.9. Tout morphisme d'opérades $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ induit un foncteur pour toute $\mathcal{Q}$-algèbre A :

$$\begin{aligned} \varphi^{*A} :\ \mathrm{Mod}_Q(A) &\longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(\varphi^* A) \\ M &\longmapsto M^{\varphi} \end{aligned}$$

où M^{φ} est le $\mathbb{K}$-module sous-jacent à M est dont l'action de $\varphi^* A$ est donnée par

$$\mu^i_{M^{\varphi}}(a_1, \dots, x, \dots, a_n) := \varphi(\mu)^i_M(a_1, \dots, x, \dots, a_n). \tag{2}$$

On a alors $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}^{*A} = \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)}$, et si $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ est un autre morphisme d'opérades, alors on a

$$(\varphi \circ \psi)^{*A} = \psi^{*\varphi^*(A)} \circ \varphi^{*A}.$$

Démonstration. Si A est une $\mathcal{Q}$-algèbre et si M est un A-module, alors (*cf.* proposition 2.2.4) on a un morphisme d'opérades

$$(f_A, f_M) : \mathcal{Q} \to \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$$

qui donne, après pré-composition par φ, la structure de $\varphi^* A$-module énoncée à M. Un morphisme de A-modules $f : M \to N$ devient alors immédiatement une morphisme de $\varphi^* A$-modules.

Enfin, la formule (2) explicitant $f_M \circ \varphi$ permet de voir qu'on a $M^{\mathrm{id}_{\mathcal{P}}} = M$ et $(M^{\varphi})^{\psi} = M^{\varphi \circ \psi}$. ✿

On note la structure de $\varphi^* A$-module induite par M^{φ} car le foncteur φ^{*A} se réalise en fait comme un foncteur d'extension des scalaires *cf.* 3.1.5.

2.3 Module de Beck et dérivation

Une manière de montrer que la notion de module que l'on vient d'introduire est la bonne et de la comparer à une notion plus générale encore : les *modules de Beck*.

Définition 2.3.1. Soit X un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$ admettant les produits fibrés par X. Un *module de Beck* sur X est un objet de la catégorie

$$\mathrm{Ab}(\mathcal{C}_{/X})$$

des objets groupes abéliens au-dessus de X.

Explicitement, un objet au dessus de X est la donnée d'un objet Y de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme structurel $\pi_Y : Y \to X$ et un module de Beck est un objet au dessus de X muni d'une structure de groupe abélien, *i.e.* il est muni de morphismes d'objets au dessus de X

$$\begin{tikzcd} Y \times_X Y \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_{Y\times_X Y}"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} Y \times_X Y \times_X Y \arrow[r, "\alpha\times_X \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y \times_X \alpha"'] & Y \times_X Y \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \times_X Y \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times_X Y \arrow[rr, "(\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_1)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \times_X Y \arrow[dl, "\alpha"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Associativité Commutativité

$$\begin{tikzcd} Y \times_X X \arrow[r, "\mathrm{id}_Y \times_X \eta"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & Y \times_X Y \arrow[d, "\alpha"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y,\sigma)"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & Y \times_X Y \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "\eta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Élément neutre Inverse

On a vu dans la proposition 2.1.8 que les produits fibrés de $\mathcal{P}$-algèbres existent. Pour voir le lien entre les modules de Beck sur une $\mathcal{P}$-algèbre A et les A-modules au sens de la définition 2.2.1, on remarque que le morphisme d'opérades $\mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon} \hookrightarrow \mathcal{E}nd_{A\oplus M}$ introduit dans la proposition 2.2.3 fait de $A \oplus M$ une $\mathcal{P}$-algèbre dès que M est un A-module. On note alors cette $\mathcal{P}$-algèbre $A \ltimes M$. Explicitement, pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, on a

$$\mu_{A\ltimes M}((a_1, x_1), \ldots, (a_n, x_n)) = \left(\mu_A(a_1, \ldots, a_n), \sum_{i=1}^{n} \mu^i_M(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)\right).$$

Par construction, la projection $\pi : A \ltimes M \to A$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres et donc $(A \ltimes M, \pi) \in \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}$. De plus, $A \ltimes M$ admet naturellement une structure de groupe abélien au-dessus de A en posant les morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres suivant :

$$\begin{aligned} \alpha :\ (A \ltimes M) \times_A (A \ltimes M) &\longrightarrow A \ltimes M \\ ((a, x), (a, y)) &\longmapsto (a, x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta :\ A &\longrightarrow A \ltimes M \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma :\ A \ltimes M &\longrightarrow A \ltimes M \\ (a, x) &\longmapsto (a, -x) \end{aligned}$$

Enfin, si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules, alors $\mathrm{id}_A \oplus f : A \ltimes M \to A \ltimes N$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres préservant la structure de groupe si bien qu'on a un foncteur :

$$A \ltimes - : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Ab}\left(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}\right).$$

Dans l'autre sens, si l'on considère $(B, \pi, \alpha, \eta, \sigma)$ un groupe abélien au-dessus de A, alors $K := \mathrm{Ker}(\pi)$ obtient naturellement une structure de A-module en posant

$$\mu^i_K(a_1, \dots, x, \dots, a_n) := \mu_B(\eta(a_1), \dots, x, \dots, \eta(a_n)).$$

pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Cette opération est bien à valeurs dans $\mathrm{Ker}(\pi)$ car

$$\pi(\mu_B(\eta(a_1), \dots, x, \dots, \eta(a_n)) = \mu_A(\pi\eta(a_1), \dots, \pi(x), \dots, \pi\eta(a_n)) = 0$$

si $\pi(x) = 0$. De plus, cette opération vérifie bien la condition (1) :

$$\begin{aligned}
&(\mu \circ (\alpha_1, \dots, \alpha_n))^i_K (a_1, \dots, x, \dots, a_{I_n}) \\
=&\mu_B \left(\alpha_{1B}(\eta(a_1), \dots, \eta(a_{I_1})), \dots, \alpha_{jB}(\eta(a_{I_{j-1}+1}), \dots, x, \dots \eta(a_{I_j})), \dots, \alpha_{nB}(\eta(a_{I_{n-1}+1}), \dots, \eta(a_{I_n}))\right) \\
=&\mu^j_K \left(\alpha_{1A}(a_1, \dots, a_{I_1}), \dots, \alpha^k_{jK}(a_{I_{j-1}+1}, \dots, x, \dots, a_{I_j}), \dots, \alpha_{nA}(a_{I_{n-1}+1}, \dots, a_{I_n})\right)
\end{aligned}$$

Enfin, si $f : (B_1, \pi_1, \alpha_1, \eta_1, \sigma_1) \to (B_2, \pi_2, \alpha_2, \eta_2, \sigma_2)$ est un morphisme de groupes abéliens au dessus de A, alors f se restreint en une application $f_* : \mathrm{Ker}(\pi_1) \to \mathrm{Ker}(\pi_2)$, et comme f est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres et préserve l'unité, f_* est un morphisme de A-modules. On a donc un autre foncteur

$$\mathrm{Ker} : \mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A).$$

Lemme 2.3.2. Soit $(B, \pi, \alpha, \eta, \sigma) \in \mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A})$. Pour tout $x, y \in \mathrm{Ker}(\pi)$, on a

$$\alpha(x, y) = x + y$$

et pour tout $b_1, \dots, b_n \in B$,

$$\mu_B(b_1, \dots, x, \dots, y, \dots, b_n) = 0.$$

Démonstration. Comme $\pi(x) = 0 = \pi(y)$, on a $(x, 0), (0, y) \in B \times_A B$ et $(x, 0) + (0, y) = (x, y) \in B \times_A B$. Ainsi, pour la première égalité, on a

$$\alpha(x, y) = \alpha(x, 0) + \alpha(0, y) = \alpha(x, \eta\pi(x)) + \alpha(\eta\pi(y), y) = x + y$$

et pour la seconde :

$$\begin{aligned}
\mu_B (b_1, \dots, x, \dots, y, \dots, b_n) &= \mu_B (\alpha(b_1, \eta\pi(b_1)), \dots, \alpha(x, 0), \dots, \alpha(0, y), \dots, \alpha(b_n, \eta\pi(b_n))) \\
&= \alpha(\mu_B(b_1, \dots, x, \dots, 0, \dots, b_n), \mu_B(\eta\pi(b_1), \dots, 0, \dots, y \dots, \eta\pi(b_n))) \\
&= \alpha(0, 0) = 0
\end{aligned}$$

✿

Théorème 2.3.3. Les foncteurs définis précédemment forment une équivalence de catégories :

$$A \ltimes - : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \underset{\sim}{\rightleftarrows} \mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}) : \mathrm{Ker}$$

Démonstration. Dans un sens, si $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$, alors la projection naturelle $A \oplus M \to M$ induit un isomorphisme naturels de A-modules $\mathrm{Ker}(A \ltimes M \to A) \simeq M$ car

$$\mu^i_K(a_1, \dots, (0, x), \dots, a_n) = \mu_{A \ltimes M}((a_1, 0), \dots, (0, x), \dots, (a_n, 0)) = (0, \mu^i_M(a_1, \dots, x, \dots, a_n)).$$

Dans l'autre sens, si $(B, \pi, \alpha, \eta, \sigma) \in \mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(A))$, alors on a une suite exacte scindé à droite dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "\pi"] & A \arrow[l, bend left, "\eta"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

si bien qu'on a un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules $(\eta, j) : A \oplus K \to B$.

C'est un isomorphisme de $\mathcal{P}$-algèbres car pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, on a

$$\begin{aligned}
(\eta, j)(\mu_{A \ltimes K}((a_1, x_1), \ldots, (a_n, x_n))) &= (\eta, j) \left(\mu_A(a_1, \ldots, a_n), \sum_{i=1}^n \mu_K^i(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) \right) \\
&= \eta(\mu_A(a_1, \ldots, a_n)) + \sum_{i=1}^n \mu_K^i(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) \\
&= \mu_B(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) + \sum_{i=1}^n \mu_B(\eta(a_1), \ldots, x_i, \ldots, \eta(a_n)) \\
&= \mu_B(\eta(a_1) + x_1, \ldots, \eta(a_n) + x_n)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du lemme précédent. C'est aussi bien un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres au-dessus de A car $\pi(\eta(a) + x) = a$ si $\pi(x) = 0$. Enfin, c'est bien un morphisme de groupes abéliens car pour tout $(a, x), (a, y) \in A \ltimes K$, on a

$$\alpha(\eta(a) + x, \eta(a) + y) = \alpha(\eta(a), \eta(a)) + \alpha(x, y) = \eta(a) + (x + y)$$

d'après le lemme encore. ✿

Exemples 2.3.4.
— L'équivalence $\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}ss}(A) \simeq \mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}(\mathcal{A}ss)_{/A})$ a été démontrée par Quillen dans [Qui70]. Lorsque M est un A-bimodule, la produit associatif sur $A \ltimes M$ est défini par $(a_1, m_1)(a_2, m_2) = (a_1 a_2, a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2)$.
— Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et M est un $\mathfrak{g}$-module, alors le crochet de Lie sur $\mathfrak{g} \ltimes M$ est défini par $[(g_1, m_1), (g_2, m_2)] = ([g_1, g_2], g_1 \cdot m_2 - g_2 \cdot m_1)$.

L'algèbre $A \ltimes M$ permet aussi de représenter la notion de dérivation pour une opérade quelconque.

Définition 2.3.5. Soit $(B, \pi) \in \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}$ et M est un A-module. Une A-*dérivation* de B à valeurs dans M est une application $\mathbb{K}$-linéaire $d : B \to M$ telle que

$$d(\mu_B(b_1, \ldots, b_n)) = \sum_{i=1}^n \mu_M^i(\pi(b_1), \ldots, d(b_i), \ldots, \pi(b_n))$$

pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et $b_1, \ldots, b_n \in B$. Le $\mathbb{K}$-module des dérivations de B dans M est noté $\mathrm{Der}_A(B, M)$.

Comme la pré-composition d'une dérivation par un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres au dessus de A et la post-composition d'une dérivation par un morphisme de A-modules sont encore des dérivations, le module des dérivations induit un bifoncteur

$$\mathrm{Der}_A(-, -) : \left(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}\right)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{K}).$$

Proposition 2.3.6. L'application

$$\mathrm{pr}_* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}}(B, A \ltimes M) \to \mathrm{Der}_A(B, M)$$

envoyant un morphisme sur sa seconde composante est bien définie et est un isomorphisme naturel de $\mathbb{K}$-modules..

Démonstration. Si $d = (d_A, d_M) : B \to A \ltimes M$ est un morphisme d'algèbres au-dessus de A, alors $d_A = \pi$ et

$$\begin{aligned}
d(\mu_B(b_1, \ldots, b_n)) &= \mu_{A \ltimes M}(d(b_1), \ldots, d(b_n)) \\
&= \left(\mu_A(\pi(b_1), \ldots, \pi(b_n)), \sum_{i=1}^n \mu_M^i(\pi(b_1), \ldots, d(b_i), \ldots, \pi(b_n)) \right)
\end{aligned}$$

et donc d_M est bien une dérivation de B dans M. On observe alors que l'application $d \mapsto (\pi, d)$ définit bien un isomorphisme inverse à pr_*.

Le fait que pr_* soit une application $\mathbb{K}$-linéaire naturelle provient du fait que c'est le morphisme de post-composition par la projection naturelle $\mathrm{pr} : A \ltimes M \to M$. ✿

Ainsi, pour tout A-module M, le foncteur

$$\mathrm{Der}_A(-, M) : \left(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}\right)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{K})$$

est représentable par $A \ltimes M$.

Pour la représentabilité à droite du foncteur des dérivations, il faut construire le module des différentielles de Kähler.

Définition 2.3.7. Le *module des différentielles de Kähler* $\Omega_{\mathcal{P}} A$ est le A-module quotient

$$\frac{F_A(A)}{\left(\mu^i \otimes (a_1, \ldots, \nu_A(a_i, \ldots, a_{i-1+m}), \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{m} (\mu \circ (\mathrm{id}, \ldots, \nu, \ldots, \mathrm{id}))^{i-1+k}(a_1, , \ldots, a_{i-1+k}, \ldots, a_n)\right)}$$

Il s'avère que la donnée d'un morphisme de A-modules $\Omega_{\mathcal{P}} A \to M$ correspond naturellement à une dérivation sur A à valeurs dans M et cela se généralise à toute algèbre au-dessus de A grâce à la restriction des scalaires.

Proposition 2.3.8. Soit $(B, \pi) \in \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}$ et M un A-module. L'application naturelles

$$\mathrm{Hom}_B\left(\Omega_{\mathcal{P}} B, M^\pi\right) \to \mathrm{Hom}_B(F_B(B), M^\pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(B, M)$$

induit un isomorphisme naturel de $\mathbb{K}$-modules

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{\mathcal{P}} B, M^\pi) \simeq \mathrm{Der}_A(B, M).$$

Démonstration. Le fait que l'application naturelle $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{\mathcal{P}} B, M^\pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(B, M)$ soit un morphisme $\mathbb{K}$-linéaire provient du fait qu'il est la composition du morphisme de pré-composition par la projection linéaire $F_B(B) \to \Omega_{\mathcal{P}} B$ et de l'adjonction libre-oublie.

Explicitement, si $f : \Omega_{\mathcal{P}} B \to M^\pi$ est une morphisme de B-modules, alors l'application associée $d_f : B \to M$ envoie b sur $f(\mathrm{id}^1 \otimes b)$. On a alors

$$\begin{aligned}
d_f(\mu_B(b_1, \ldots, b_n)) &= f(\mathrm{id}^1 \otimes \mu_B(b_1, \ldots, b_n)) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu^i \otimes (b_1, \ldots, b_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_M^i(\pi(b_1), \ldots, f(\mathrm{id}^1 \otimes b_i), \ldots, \pi(b_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_M^i(\pi(b_1), \ldots, d(b_i), \ldots, \pi(b_n))
\end{aligned}$$

et donc d_f est une A-dérivation. Ainsi, on a un morphisme naturelle

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{\mathcal{P}} B, M^\pi) \to \mathrm{Der}_A(B, M).$$

Réciproquement, si $d : B \to M$ est une A-dérivation, alors le morphisme de B-modules $f_d : F_B(B) \to M^\pi$ qu'elle induit se factorise par la projection $F_B(B) \to \Omega_{\mathcal{P}} B$ car

$$\begin{aligned}
& f_d(\mu^i \otimes (b_1, \ldots, \nu_B(b_i, \ldots, b_{i-1+m}), \ldots, b_n) \\
=& \mu_M^i(\pi(b_1), \ldots, d\nu_B(b_i, \ldots, b_{i-1+m}), \ldots, \pi(b_n)) \\
=& \sum_{k=1}^{m} \mu_M^i(\pi(b_1), \ldots, \nu_M^k(\pi(b_i), \ldots, d(b_{i-1+k}), \ldots, \pi(b_{i-1+m})), \ldots, \pi(b_n)) \\
=& \sum_{k=1}^{m} (\mu \circ (\mathrm{id}, \ldots, \nu, \ldots, \mathrm{id}))_{M^\pi}^{i-1+k}(b_1, \ldots, d(b_{i-1+k}), \ldots, b_n) \\
=& f_d\left(\sum_{k=1}^{m} (\mu \circ (\mathrm{id}, \ldots, \nu, \ldots, \mathrm{id}))^{i-1+k} \otimes (b_1, \ldots, b_{i-1+k}, \ldots, b_n)\right).
\end{aligned}$$

La dérivation $d' := d_{f_d}$ associée au morphisme $f_d : \Omega_{\mathcal{P}}B \to M^\pi$ vérifie alors

$$d'(b) = f_d(\mathrm{id}^1 \otimes b) = d(b)$$

pour tout $b \in B$. Réciproquement, si on note $f' := f_{d_f}$ pour $f : \Omega_{\mathcal{P}}B \to M^\pi$ un morphisme de B-modules, alors $f' = f$:

$$f'(\mu^i \otimes (b_1, \ldots, b_n)) = \mu^i_M(\pi(b_1), \ldots, f(\mathrm{id}^1 \otimes b_i), \ldots, \pi(b_n)) = f(\mu^i \otimes (b_1, \ldots, b_n))$$

✿

Il ne reste plus qu'à remonter dans la catégorie des A-modules en utilisant l'extension des scalaires (*cf.* proposition 2.2.8).

Théorème 2.3.9. Soit $(B, \pi) \in \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}$ et $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$. Posons $\Omega_{\mathcal{P}}(A/B) := \pi_!(\Omega_{\mathcal{P}}(B))$. On a alors des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{\mathcal{P}}(A/B), M) \simeq \mathrm{Der}_A(B, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}}(B, A \ltimes M),$$

i.e. le bifoncteur des A-dérivations $\mathrm{Der}_A(-,-) : \left(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}\right)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ est représentable à gauche par $A \ltimes M$ et à droite par $\Omega_{\mathcal{P}}(A/B)$.

En particulier, on a une adjonction

$$\Omega_{\mathcal{P}}(A/-) : \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) : A \ltimes -$$

Démonstration. Par extension des scalaires (proposition 2.2.8), on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{\mathcal{P}}(A/B), M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega_{\mathcal{P}}B, M^\pi).$$

et d'après les propositions 2.3.8 et 2.3.6, on a les isomorphisme naturels

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{\mathcal{P}}B, M^\pi) \simeq \mathrm{Der}_A(B, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}}(B, A \ltimes M).$$

Seule la fonctorialité de $\Omega_{\mathcal{P}}(A/-)$ n'a pas été encore justifiée permettant d'énoncé l'adjonction

$$\Omega_{\mathcal{P}}(A/-) \dashv A \ltimes -.$$

Or, si $f : (B_1, \pi_1) \to (B_2, \pi_2)$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres au dessus de A, alors il induit un morphisme

$$\mathrm{Der}_{B_2}(f, j) : \mathrm{Der}_{B_2}(B_2, \Omega_{\mathcal{P}}B_2) \to \mathrm{Der}_{B_2}(B_1, \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2)^{\pi_2})$$

où $j : \Omega_{\mathcal{P}}B_2 \to \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2)^{\pi_2}$ est l'unité de l'adjonction $(\pi_{2!} \dashv \pi_2^*)$. De plus, d'après la proposition 2.3.8 et par extension des scalaires, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_{B_2}(B_1, \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2)^{\pi_2}) &\simeq \mathrm{Hom}_{B_1}\left(\Omega_{\mathcal{P}}B_1, (\Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2)^{\pi_2})^f\right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_{\mathcal{P}}(A/B_1), \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2)) \qquad (\text{car } \pi_2 \circ f = \pi_1) \end{aligned}$$

Ainsi, en évaluant $\mathrm{Der}_{B_2}(f, j)$ en la dérivation canonique $d_{B_2} \in \mathrm{Der}_{B_2}(B_2, \Omega_{\mathcal{P}}B_2)$ (correspondant à l'identité de $\Omega_{\mathcal{P}}(B_2)$), on obtient un morphisme de A-modules

$$f_* : \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_1) \to \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2).$$

Autrement dit, f_* est défini comme l'unique morphisme de A-modules faisant commuter le diagramme suivante

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j \circ d"'] & B_2 \arrow[d, "j \circ d"] \\ \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_1) \arrow[r, "f_*"'] & \Omega_{\mathcal{P}}(A/B_2) \end{tikzcd}$$

ce qui assure le fait qu'on ait $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ et $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. ✿

Remarque 2.3.10. En utilisant l'équivalence de catégories $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \simeq \mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A})$ (proposition 2.3.3), on voit que le foncteur $\Omega_{\mathcal{P}}(A/-)$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli

$$\mathrm{Ab}(\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A}.$$

L'adjonction $\Omega_{\mathcal{P}}(A/-) \dashv A \ltimes -$ est à l'origine de la cohomologie d'André-Quillen. En effet, la cohomologie d'André-Quillen $H^{\bullet}_{\mathcal{P}}(A, M)$ s'obtient en dérivant à gauche le foncteur de dérivations. Néanmoins, comme la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres (différentielles graduées) au-dessus de A n'est pas abélienne, le formalisme habituel des foncteurs dérivés n'a pas de sens et doit être remplacé par la dérivation des foncteurs sur des *catégories de modèles* (*cf.* [Hov07] ou [Rie14] pour une introduction aux catégories de modèles). La construction de la cohomologie d'André-Quillen peut être retrouvée dans la partie 12.3. de [LV12] dont nous en reprenons ici l'essentiel.

La propriété importante est que l'adjonction précédente est une *adjonction de Quillen* dans le cadre différentiel gradué. C'est cela qui permet de s'assurer que le complexe $\Omega_{\mathcal{P}}(A/R_\bullet)$ (appelé *complexe cotangent de* A) ne dépend pas du choix de cofibration (notion de résolution projective pour les catégories de modèles) $R_\bullet \to A$ dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbre différentielles graduées au-dessus de A.

La cohomologie d'André-Quillen à coefficients dans M est alors définie comme la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}(\Omega_{\mathcal{P}}(A/R_\bullet), M)$ des morphismes dans la *catégorie homotopique* associée à $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ (notion de catégorie dérivée pour les catégories de modèles).

3 Algèbre enveloppante

3.1 L'algèbre enveloppante en théorie

Dans cette section, $\mathcal{P}$ est une opérade quelconque et A est une $\mathcal{P}$-algèbre fixée. On a vu (proposition 2.2.7) que la catégorie des A-modules opéradiques était abélienne. Ainsi, on sait grâce au théorème de plongement de Mitchell qu'il existe un anneau R tel que la catégorie des A-modules se plonge dans la catégorie des R-modules à gauche. La notion d'*algèbre enveloppante* permet d'améliorer la situation puisqu'elle donne explicitement un anneau R tel que la catégorie de ses modules à gauche soit isomorphe à $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$.

Soit M un A-module. Grâce à l'adjonction vu en proposition 2.2.6, on a les isomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires

$$M \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(F_A(\mathbb{K}), M) \tag{3}$$

et en particulier, on a l'isomorphisme $F_A(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K}))$. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ étant $\mathbb{K}$-linéaire, la composition induit une structure de $\mathbb{K}$-algèbre unitaire sur $\mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K})) \simeq F_A(\mathbb{K})$. Explicitement, dans $F_A(\mathbb{K})$, on a

$$\gamma \cdot \big(\mu^i \otimes (a_1, \dots, 1, \dots, a_n)\big) = \mu^i_{F_A(\mathbb{K})}(a_1, \dots, \gamma, \dots, a_n).$$

Définition 3.1.1. L'*algèbre enveloppante* d'une $\mathcal{P}$-algèbre A est la $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire

$$U_{\mathcal{P}}(A) := F_A(\mathbb{K})^{\mathrm{op}}.$$

On a naturellement un foncteur

$$H : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{LMod}\,(U_{\mathcal{P}}(A))$$

(où $\mathrm{LMod}(R)$ désigne la catégorie des modules à gauche sur un anneau R) puisque, pour tout A-module M, l'anneau $\mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K}))$ agit à droite sur $\mathrm{Hom}_A(F_A(\mathbb{K}), M)$ par pré-composition, et donc l'anneau $U_{\mathcal{P}}(A)$ agit à gauche sur M. Explicitement, on a

$$\big(\mu^i \otimes (a_1, \dots, 1, \dots, a_n)\big) \cdot x = \mu^i_M(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$$

et l'isomorphisme (3) se promeut alors en un isomorphisme naturel entre H et le foncteur Hom

$$\mathrm{Hom}_A(F_A(\mathbb{K}), -) : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A)).$$

Théorème 3.1.2. Le foncteur $H : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A))$ est un isomorphisme de catégories commutant avec les foncteurs d'oubli vers $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ ce qui implique qu'il commute, à isomorphisme près, avec les foncteurs libre partant de $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, *i.e.* le diagramme suivant commute à isomorphisme près

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \arrow[rr, "H", "\sim"'] \arrow[dr, shift left] & & \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A)) \arrow[dl, shift right] \\
& \mathrm{Mod}(\mathbb{K}) \arrow[ul, shift left, "F_A"] \arrow[ul, phantom, "\top"] \arrow[ur, shift right, "U_{\mathcal{P}}(A)\otimes_{\mathbb{K}} -"'] \arrow[ur, phantom, "\top"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit M un $U_{\mathcal{P}}(A)$-module à gauche. La structure de A-module de $F_A(\mathbb{K})$ induit alors une structure de A-module sur M en posant

$$\begin{aligned}
\mu^i_M(a_1, \dots, x, \dots, a_n) :=& (\mu^i \otimes (a_1, \dots, 1, \dots, a_n)) \cdot x \\
=& \mu^i_{F_A(\mathbb{K})}(a_1, \dots, 1, \dots, a_n) \cdot x
\end{aligned}$$

Une application $U_{\mathcal{P}}(A)$-linéaire $f : M \to N$ est alors automatiquement un morphisme de A-modules :

$$\begin{aligned}
f(\mu^i_M(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) &= f(\mu^i_{F_A(\mathbb{K})}(a_1, \dots, 1, \dots, a_n) \cdot x) \\
&= \mu^i_{F_A(\mathbb{K})}(a_1, \dots, 1, \dots, a_n) \cdot f(x) \\
&= \mu^i_N(a_1, \dots, f(x), \dots, a_n)
\end{aligned}$$

On a alors un foncteur $\mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A)) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ qui est inverse de H.

Par construction, H commute avec les foncteurs d'oubli et cela implique formellement la commutation, à isomorphisme près, avec les foncteurs libre. En effet, on la suite d'isomorphisme naturels suivant

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{U_{\mathcal{P}}(A)}(H(F_A(V)),N) &\simeq \mathrm{Hom}_A(F_A(V),H^{-1}(N))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,H^{-1}(N))\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,N)\end{aligned}$$

et donc $H\circ F_A$ est adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A))\to\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$.

✿

Remarques 3.1.3.

— On a obtenu formellement un isomorphisme naturel $F_A(V)\simeq F_A(\mathbb{K})\otimes V$. Concrètement, cet isomorphisme s'obtient comme passage au quotient de l'isomorphisme $\mathcal{P}(A;V)\simeq\mathcal{P}(A;\mathbb{K})\otimes V$ induit par les isomorphismes

$$\mathcal{P}(n)\otimes_{\mathfrak{S}_n}\left(\bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes(i-1)}\otimes V\otimes A^{\otimes(n-i)}\right)\simeq\left(\mathcal{P}(n)\otimes_{\mathfrak{S}_n}\left(\bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes(i-1)}\otimes\mathbb{K}\otimes A^{\otimes(n-i)}\right)\right)\otimes V$$

— Il faut faire attention au fait que l'équivalence $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)\simeq\mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(A))$ ne caractérise l'enveloppante qu'à Morita équivalence près. Par exemple, toute algèbre R est Morita équivalent à l'algèbre des matrice $M_n(R)$ pour tout entier $n\geqslant 0$ (*cf.* [Lam12] théorème 17.20 page 470).

— Le fait que H commute avec les foncteurs libre justifie le fait de noter $A\otimes^{\mathcal{P}}V:=F_A(V)$ puisque l'on a alors

$$H(A\otimes^{\mathcal{P}}V)\simeq U_{\mathcal{P}}(A)\otimes V.$$

C'est d'ailleurs cette propriété supplémentaire qui permet de vraiment caractériser l'algèbre enveloppante. En effet, si on a une $\mathbb{K}$-algèbre R et une équivalence de catégories $G:\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)\to\mathrm{LMod}(R)$ commutant avec les foncteurs libre à isomorphisme près, alors $R\simeq R\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}\simeq G(A\otimes^{\mathcal{P}}\mathbb{K})$ dans $\mathrm{LMod}(R)$ et on obtient un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres

$$R\simeq\mathrm{End}_{\mathrm{LMod}(R)}(R)^{\mathrm{op}}\simeq\mathrm{End}_A(A\otimes^{\mathcal{P}}\mathbb{K})^{\mathrm{op}}\simeq U_{\mathcal{P}}(A).$$

L'algèbre enveloppante est en fait une construction fonctorielle. En effet, si on considère un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres $f:A\to B$, alors on peut construire l'application $\mathbb{K}$-linéaire $f_*:U_{\mathcal{P}}(A)\to U_{\mathcal{P}}(B)$ comme l'unique application faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K})) \arrow[r, "f_*"] \arrow[ddr, "1_f\circ -"'] & \mathrm{End}_B(F_B(\mathbb{K}))\ni 1_{U_{\mathcal{P}}(B)} \arrow[d, equal] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K},F_B(\mathbb{K})) \arrow[d, equal] \\
& \mathrm{Hom}_A\left(F_A(\mathbb{K}),F_B(\mathbb{K})^f\right)\ni 1_f
\end{tikzcd}$$

où 1_f est l'unique morphisme de A-modules envoyant $1_{U_{\mathcal{P}}(A)}$ sur $1_{U_{\mathcal{P}}(B)}$. Explicitement, f_* envoie un endomorphisme g sur l'unique endomorphisme de $F_B(\mathbb{K})$ envoyant $1_{U_{\mathcal{P}}(B)}$ sur $(1_f\circ g)(1_{U_{\mathcal{P}}(A)})$.

Proposition 3.1.4. L'application $\mathbb{K}$-linéaire $f_*:\mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K}))\to\mathrm{End}_B(F_B(\mathbb{K}))$ précédemment définie est un morphisme de $\mathbb{K}$- algèbres associatives unitaires si bien que l'algèbre enveloppante est un foncteur

$$U_{\mathcal{P}}:\mathrm{Alg}(\mathcal{P})\to\mathrm{Alg}(u\mathcal{A}ss)$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que pour tout $g\in\mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K}))$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
F_A(\mathbb{K}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_f"'] & F_A(\mathbb{K}) \arrow[d, "1_f"] \\
F_B(\mathbb{K})^f \arrow[r, "(f_*g)^f"'] & F_B(\mathbb{K})^f
\end{tikzcd}$$

car $1_f \circ g$ et $(f_* g)^f \circ 1_f$ sont tous deux des morphismes de A-modules envoyant $1_{U_{\mathcal{P}}(A)}$ sur $1_f(g(1_{U_{\mathcal{P}}(A)}))$. Ainsi, pour tout $g_1, g_2 \in \mathrm{End}_A(F_A(\mathbb{K}))$, on a

$$\begin{aligned}(f_*(g_2 \circ g_1))\,(1_{U_{\mathcal{P}}(B)}) &= (1_f \circ g_2)(g_1(1_{U_{\mathcal{P}}(A)})) \\ &= f_* g_2(1_f(g_1(1_{U_{\mathcal{P}}(A)}))) \\ &= (f_* g_2 \circ f_* g_1)(1_{U_{\mathcal{P}}(B)})\end{aligned}$$

et donc $f_*(g_2 \circ g_1) = f_*(g_2) \circ f_*(g_1)$. De plus, on a bien $f_* \,\mathrm{id}_{F_A(\mathbb{K})} = \mathrm{id}_{F_B(\mathbb{K})}$ car ces deux morphismes de B-modules fixent $1_{U_{\mathcal{P}}(B)}$.

Enfin, pour la fonctorialité, on a bien $\mathrm{id}_{A*} = \mathrm{id}_{U_{\mathcal{P}}(A)}$ car $1_{\mathrm{id}_A} = \mathrm{id}_{F_A(\mathbb{K})}$, et si on a des morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres $f : A \to B$ et $g : B \to C$, alors on a

$$1_g^f \circ 1_f = 1_{g \circ f} : F_A(\mathbb{K}) \to (F_C(\mathbb{K})^g)^f$$

et donc $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. ✿

On a prouvé ici que l'expression $U_{\mathcal{P}}(A)$ était fonctorielle en A, mais elle est en fait aussi en $\mathcal{P}$. On a déjà vu dans la proposition 2.2.9 qu'un morphisme d'opérades $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ induit, pour toute $\mathcal{Q}$-algèbre A, un foncteur

$$\varphi^{*A} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{Q}}(A) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(\varphi^* A).$$

La counité $V \to F_A(V)$ induit alors un morphisme $\varphi^* A$-linéaire

$$F_{\varphi^* A}(V) \to F_A(V)^{\varphi}.$$

Proposition 3.1.5. Pour tout morphisme d'opérades $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ et pour toute $\mathcal{Q}$-algèbre A, le morphisme naturel

$$\psi : F_{\varphi^* A}(\mathbb{K}) \to F_A(\mathbb{K})^{\varphi}$$

induit un morphisme d'anneaux

$$U_{\varphi}^A : U_{\mathcal{P}}(\varphi^* A) \to U_{\mathcal{Q}}(A).$$

dont le foncteur de restriction des scalaires est φ^{*A} modulo H *i.e.* le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_{\mathcal{Q}}(A) \arrow[r, "\varphi^{*A}"] \arrow[d, "H"'] & \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(\varphi^* A) \arrow[d, "H"] \\ \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{Q}}(A)) \arrow[r, "(U_{\varphi}^A)^*"'] & \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}(\varphi^* A)) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le morphisme ψ induit l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\begin{aligned}\psi_U : \mathrm{End}_{\varphi^* A}\left(F_{\varphi^* A}(\mathbb{K})\right) &\longrightarrow \mathrm{End}_A\left(F_A(\mathbb{K})\right) \\ f &\longmapsto (1 \mapsto \psi(f(1)))\end{aligned}$$

Cette application est un morphisme d'anneaux unitaires car $\psi(1) = 1$ d'une part, et d'autre part, pour tout $f, g \in \mathrm{End}_{\varphi^* A}(F_{\varphi^* A}(\mathbb{K}))$, on a :

$$\begin{aligned}\psi_U(g \circ f)(1) &= \psi(g(f(1)) \\ &= (\psi_U g)(\psi(f(1))) \\ &= (\psi_U g \circ \psi_U f)(1)\end{aligned}$$

la seconde égalité provenant du fait que l'on a $\psi \circ g = \psi_U g \circ \psi$ car ces deux applications $\varphi^* A$-linéaires envoient $1 \in F_{\varphi^* A}(\mathbb{K})$ sur $\psi(g(1)) \in F_A(\mathbb{K})^{\varphi}$.

Le morphisme ψ se promeut donc bien en un morphisme d'anneaux $U_\varphi^A : U_\mathcal{P}(\varphi^* A) \to U_\mathcal{Q}(A)$. Explicitement, il envoie $\mu^i \otimes (a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n)$ sur $\varphi(\mu)^i \otimes (a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n)$. Or, le foncteur φ^{*A} consiste à munir un A-module M d'une structure de $\varphi^* A$-module en posant $\mu^i_{M^\varphi}(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n) := \varphi(\mu)^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)$. Ainsi, on a bien $H \circ \varphi^{*A} = (U_\varphi^A)^* \circ H$ puisque ces deux foncteurs munissent un A-module M d'une structure de $U_\mathcal{P}(\varphi^* A))$-module à gauche en posant

$$\mu^i \otimes (a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n) \cdot x := \varphi(\mu)^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n).$$

✿

L'isomorphisme $H : \mathrm{Mod}_\mathcal{P}(A) \to \mathrm{LMod}(U_\mathcal{P}(A))$ permet aussi de transporter les mécaniques habituelles d'études des modules à gauche sur un anneau vers le contexte opéradique.

Proposition 3.1.6. Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. Les adjonctions restriction-extension des scalaires $f^* \vdash f_!$, dans le cadre opéradique, et $(U_\mathcal{P} f)^* \vdash (U_\mathcal{P} f)_!$, dans le cadre habituel, se correspondent *i.e.* le digramme suivant commute à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}_\mathcal{P}(A) \arrow[r, shift left, "f_!"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, "H"'] & \mathrm{Mod}_\mathcal{P}(B) \arrow[l, shift left, "f^*"] \arrow[d, "H"] \\
\mathrm{LMod}(U_\mathcal{P}(A)) \arrow[r, shift left, "(U_\mathcal{P} f)_!"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{LMod}(U_\mathcal{P}(B)) \arrow[l, shift left, "(U_\mathcal{P} f)^*"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme H est un isomorphisme de catégories, il suffit de vérifier que H préserve la restriction des scalaires. Or, on a bien $H \circ f^* = (U_\mathcal{P} f)^* \circ H$ car ces deux foncteurs munisse un B-module M d'une structure de $U_\mathcal{P}(A)$-module à gauche en posant

$$\mu^i \otimes (a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n) \cdot x := \mu^i_M(f(a_1), \ldots, x, \ldots, f(a_n)).$$

✿

Remarque 3.1.7. Si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres, alors $U_\mathcal{P}(B)$ devient une $U_\mathcal{P}(A)$-algèbre (à droite) grâce au morphisme $U_\mathcal{P} f$ et on vient alors d'établir l'isomorphisme

$$M_f = \frac{F_B(M)}{\big(\mu^i \otimes (f(a_1), \ldots, x, \ldots, f(a_n)) = \mathrm{id}^1 \otimes \mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)\big)} \simeq U_\mathcal{P}(B) \otimes_{U_\mathcal{P}(A)} M$$

pour tout A-module M.

3.2 Présentation de l'algèbre enveloppante

Le cas classique d'algèbre enveloppante est celui de l'enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ que l'on défini habituellement par générateurs et relations :

$$U_{\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{([g_1, g_2] - g_1 g_2 + g_2 g_1)}$$

où $T(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre tensorielle associée à $\mathfrak{g}$. On va montrer dans cette section que cette construction se généralise à toute opérade binaire quadratique si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.

Ainsi, dans toute cette section, $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2 ; E_2 est un $\mathfrak{S}_2$-module à droite de type fini ; $R_3 \subset \mathcal{T} E_2(3)$ est un ensemble fini de relations permettant de présenter l'opérade quadratique binaire

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{T}(E_2)}{(R_3)}$$

(attention, ici on note de la même manière le $\mathfrak{S}_2$-module E_2 et le $\mathfrak{S}$-module $(0, 0, E_2, 0, \ldots)$) ; et A est une $\mathcal{P}$-algèbre quelconque.

Comme la caractéristique de $\mathbb{K}$ ne divise pas l'ordre de $\mathfrak{S}_2$, l'anneau $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ est semi-simple d'après le théorème de Maschke. Ainsi, on a une décomposition de E_2 en somme directe de représentations triviales $\mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$ et de représentations signatures sgn_2 :

$$E_2 \simeq n_1 \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} \oplus n_2 \, \mathrm{sgn}_2 \,.$$

On peut alors considérer une famille génératrice $(\gamma_i, \alpha_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n_2}}$ associée à cette décomposition. Les opérations γ_i s'apparentent donc à des opérations symétriques et les α_j à des opérations antisymétriques.

Souvent, on considère des algèbres avec des opération λ_k n'admettant pas de symétrie (comme les algèbres associatives par exemple). Cela correspond à des composantes régulières (*i.e.* isomorphe à $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2] \simeq \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{sgn}_2$) dans la décomposition de E_2. La décomposition en composantes irréductibles de cette composante régulière se fait alors en posant

$$\begin{aligned} \gamma_k &:= \frac{1}{2}(\lambda_k + \rho_k) \\ \alpha_k &:= \frac{1}{2}(\lambda_k - \rho_k) \end{aligned}$$

où $\rho_k := \lambda_k \cdot (1\,2)$. On a alors la décomposition de λ_k en sa partie symétrique et sa partie anti-symétrique :

$$\lambda_k = \gamma_k + \alpha_k$$

(*cf.* 2.1.7 pour voir comment ce processus peut permettre de réduire la présentation de l'opérade des algèbres de Poisson).

Pour les générateurs de notre présentation de l'enveloppante, on considère le produit tensoriel $E_2 \otimes_{\mathbb{K}} A$ et on notera alors μ_a le tenseur élémentaire $\mu \otimes a \in E_2 \otimes A$.

Proposition 3.2.1. Notons $p : \mathcal{T}(E_2) \to \mathcal{P}$ la projection canonique. L'algèbre tensorielle $T(E_2 \otimes_{\mathbb{K}} A)$ admet une structure de p^*A-module, telle que pour tout $\beta \in \mathcal{T}E_2$, on ait

$$\begin{aligned} \beta^1_{T(E_2 \otimes A)}(x, a) &= (\beta \cdot (1\,2))_a \cdot x \\ \beta^2_{T(E_2 \otimes A)}(a, x) &= \beta_a \cdot x. \end{aligned}$$

Démonstration. On considère le morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \longrightarrow & \mathcal{E}nd_A(2) \oplus \mathrm{End}^A_{T(E_2 \otimes A), \varepsilon}(2) \\ \gamma_i & \longmapsto & \left(\gamma_{iA}, \left| \begin{array}{ccc} (a,x) & \mapsto & \gamma_{ia} \cdot x \\ (x,a) & \mapsto & \gamma_{ia} \cdot x \end{array} \right. \right) \\ \alpha_j & \longmapsto & \left(\alpha_{jA}, \left| \begin{array}{ccc} (a,x) & \mapsto & \alpha_{ja} \cdot x \\ (x,a) & \mapsto & -\alpha_{ja} \cdot x \end{array} \right. \right) \end{array}$$

On étend alors ce morphisme en un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules valant 0 en arité autre que 2

$$E_2 \to \mathcal{E}nd_A \oplus \mathrm{End}^A_{T(E_2 \otimes A), \varepsilon}$$

et, par propriété universelle de l'opérade libre, on obtient un morphisme d'opérades

$$\mathcal{T}(E_2) \to \mathcal{E}nd_A \oplus \mathrm{End}^A_{T(E_2 \otimes A), \varepsilon}$$

qui, par construction, coïncide avec le morphisme structurel de p^*A en sa première composante. Cela définit alors une structure de p^*A-module sur $T(E_2 \otimes A)$ d'après la proposition 2.2.4.

Par construction, on a $\gamma^2_{iT(E_2 \otimes A)}(a, x) = \gamma_{ia} \cdot x$ et $\alpha^2_{iT(E_2 \otimes A)}(a, x) = \alpha_{ia} \cdot x$. Cette relation s'étend alors à tout $\beta \in E_2$ par linéarité de l'application $\beta \mapsto \beta_a$ et distributivité du produit dans $T(E_2 \otimes A)$. L'identité $\beta^1_{T(E_2 \otimes A)}(x, a) = (\beta \cdot (1\,2))_a \cdot x$ est alors une conséquence du fait que le morphisme

$$E_2 \to \mathcal{E}nd_A(2) \oplus \mathrm{End}^A_{T(E_2 \otimes A), \varepsilon}(2)$$

est un morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules. ✿

Remarque 3.2.2. Si l'opérade $\mathcal{P}$ admet des opérations sans symétries λ_k, alors on peut trouver une famille génératrice (γ_i, α_j) de E_2 telle que γ_k et α_k soient respectivement les parties symétriques et anti-symétriques de λ_k. Dans ce cas, on a alors

$$\lambda^2_{kT(E_2\otimes A)}(a,x) = \lambda_{ka}\cdot x$$
$$\lambda^1_{kT(E_2\otimes A)}(x,a) = \rho_{ka}\cdot x$$

où $\rho_k = \lambda_k \cdot (1\,2)$.

La structure d'algèbre de $T(E_2\otimes A)$ permet de réécrire la façon dont p^*A agit sur $T(E_2\otimes A)$ qui n'est pas sans rappeler l'action de A sur $U_{\mathcal{P}}(A)$.

Proposition 3.2.3. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout indice $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\mu^i_{T(E_2\otimes A)}(a_1,\ldots,x,\ldots,a_n) = \mu^i_{T(E_2\otimes A)}(a_1,\ldots,1,\ldots,a_n)\cdot x \tag{4}$$

pour tout $\mu \in \mathcal{T}E_2(n)$; $a_1,\ldots,a_n \in A$; et $x \in T(E_2\otimes A)$.

Démonstration. Notons $T := T(E_2\otimes A)$. On établit l'identité (4) par récurrence sur n.

Pour $n=1$, on a $\mathcal{T}E_2(1) = \mathbb{K}\,\mathrm{id}$ et

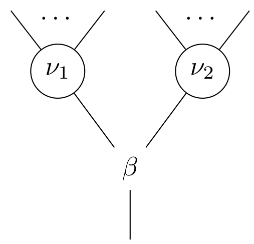
$$\mathrm{id}^1_T(x) = x = \mathrm{id}^1_T(1)\cdot x.$$

Pour $n=2$, on a $\mathcal{T}E_2(2) = E_2$ et, par construction de la structure de p^*A-module sur T vue précédemment, on a

$$\begin{aligned}\beta^1_T(x,a) &= (\beta\cdot(1\,2))_a\cdot x &&= \beta^1_T(1,a)\cdot x\\ \beta^2_T(a,x) &= \beta_a\cdot x &&= \beta^2_T(a,1)\cdot x\end{aligned}$$

Soit $n>2$ et supposons que l'identité (4) soit vraie pour tout $i<n$. Soit $\mu \in \mathcal{T}E_2(n)$. Comme E_2 est concentrée en arité 2, les arbres de $\mathrm{RT}(n)$ intervenant dans la définition de $\mathcal{T}E_2(n)$ sont les arbres binaires et il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\mu\cdot\sigma^{-1} =$$



avec $\beta \in E_2$, $\nu_1 \in \mathcal{T}E_2(n_1)$ et $\nu_2 \in \mathcal{T}E_2(n_2)$ telles que $n_1, n_2 \geqslant 1$ et $n_1+n_2 = n$. On a alors :

— si $i \leqslant n_1$:

$$\begin{aligned}(\beta\circ(\nu_1,\nu_2))^i_T(a_1,\ldots,x,\ldots,a_n) &= \beta^1_T\left(\nu^i_{1T}(a_1,\ldots,x,\ldots,a_{n_1}),\nu_{2A}(a_{n_1+1},\ldots,a_n)\right)\\ &= \beta^1_T(1,\nu_{2A}(a_{n_1+1},\ldots,a_n))\cdot\nu^i_{1T}(a_1,\ldots,1,\ldots,a_{n_1})\cdot x\\ &= (\beta\circ(\nu_1,\nu_2))^i_T(a_1,\ldots,1,\ldots,a_n)\cdot x,\end{aligned}$$

— si $i > n_1$:

$$\begin{aligned}(\beta\circ(\nu_1,\nu_2))^i_T(a_1,\ldots,x,\ldots,a_n) &= \beta^2_T\left(\nu_{1A}(a_1,\ldots,a_{n_1}),\nu^{i-n_1}_{2T}(a_{n_1+1},\ldots,x,\ldots,a_n)\right)\\ &= \beta^2_T(\nu_{1A}(a_1,\ldots,a_{n_1}),1)\cdot\nu^{i-n_1}_{2T}(a_{n_1+1},\ldots,1,\ldots,a_n)\cdot x\\ &= (\beta\circ(\nu_1,\nu_2))^i_T(a_1,\ldots,1,\ldots,a_n)\cdot x.\end{aligned}$$

Ainsi, l'identité (4) est alors vérifiée pour $\beta\circ(\nu_1,\nu_2) = \mu\cdot\sigma^{-1}$ ce qui l'implique automatiquement pour μ :

$$\begin{aligned}\mu^i_T(a_1,\ldots,x,\ldots,a_n) &= \left(\mu\cdot\sigma^{-1}\right)^{\sigma(i)}\left(a_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x,\ldots,a_{\sigma^{-1}(n)}\right)\\ &= \left(\mu\cdot\sigma^{-1}\right)^{\sigma(i)}\left(a_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,1,\ldots,a_{\sigma^{-1}(n)}\right)\cdot x\\ &= \mu^i_T(a_1,\ldots,1,\ldots,a_n)\cdot x\end{aligned}$$

✿

On notera dorénavant

$$\partial_i\mu(a_1,\dots,\widehat{a_i},\dots,a_n) := \mu^i_{T(E_2\otimes A)}(a_1,\dots,1,\dots,a_n)$$

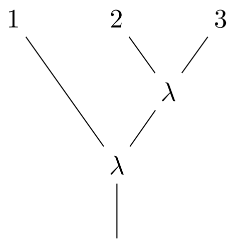
où $\widehat{a_i}$ signifie que l'on enlève l'élément a_i de la liste des arguments de $\partial_i\mu$. Avec ces notations, on voit qu'on a prouvé dans la démonstration précédente la formule

$$\partial_i(\beta\circ(\nu_1,\nu_2))(a_1,\dots,a_{n-1}) = \begin{cases} \partial_1\beta(\nu_{2A}(a_{n_1},\dots,a_{n-1}))\cdot\partial_i\nu_1(a_1,\dots,a_{n_1-1}) & \text{si } i\leqslant n_1 \\ \partial_2\beta(\nu_{1A}(a_1,\dots,a_{n_1}))\cdot\partial_{i-n_1}\nu_2(a_{n_1+1},\dots,a_{n-1}) & \text{si } i> n_1 \end{cases}$$

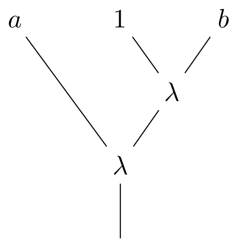
s'apparentant à la formule de la dérivée partielle d'une composition de fonctions à plusieurs variables. Cette construction est généralisée dans [Dha+25] (partie « 4. Noncommutative partial differentiation ») au cadre des variétés d'algèbres.

Pour calculer explicitement $\partial_i\mu(a_1,\dots,a_{n-1})$, la méthode est la suivante :

(i) Décomposer $\mu\in\mathcal{T}(E_2)$ comme composition d'opérations binaires ce qui revient à dessiner son arbre étiqueté. Par exemple, pour $\mu=\lambda\circ(\mathrm{id},\lambda)$ où $\lambda\in E_2$ est une opération sans symétrie (donc de la forme $\gamma+\alpha$), on a

$\mu =$ 

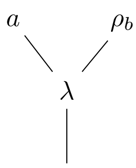
(ii) Remplacer l'étiquetage de le feuille numérotée par j par le j-ième argument de $\mu_i(a_1,\dots,1,\dots,a_{n-1})$ *i.e.* on remplace $j<i$ par a_j ; i par 1 ; et $j>i$ par a_{j-1}. En reprenant l'exemple précédent, si l'on souhaite calculer $\partial_2\mu(a,b)$, on remplace 1 par a ; 2 par 1 et 3 par b :

$\partial_2\mu(a,b) = \mu^2_T(a,x,b) =$ 

(iii) Parcourir l'arbre de haut en bas en partant de 1 :

- Si 1 arrive par la droite à un nœud étiqueté par β on multiplie β_x à gauche de 1 où x est l'expression provenant de la gauche de l'intersection.
- Si 1 arrive par la gauche à un nœud étiqueté par β, on multiplie $(\beta\cdot(1\,2))_x$ à gauche de 1 où x est l'expression provenant de la droite de l'intersection.
- Puis, on recommence avec le résultat obtenu à la place de 1.

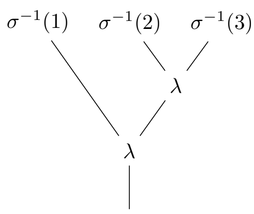
Avec notre exemple, cela donne :

$\partial_2\mu(a,b) =$ 

$= \lambda_a\rho_b$

Exemples 3.2.4.

- On résume dans le tableau suivant le calcul des différentielles de

$\mu = (\lambda\circ(\mathrm{id},\lambda))\cdot\sigma =$ 

pour $\lambda = \mathrm{id}_2 \in \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2] \subset E_2$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ (on notera $ab := \lambda_A(a, b)$) :

σ	id_3	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\partial_1(\mu \cdot \sigma)(a, b)$	ρ_{ab}	$\lambda_a\rho_b$	ρ_{ba}	$\lambda_b\lambda_a$	$\lambda_b\rho_a$	$\lambda_a\lambda_b$
$\partial_2(\mu \cdot \sigma)(a, b)$	$\lambda_a\rho_b$	ρ_{ab}	$\lambda_a\lambda_b$	$\lambda_b\rho_a$	$\lambda_b\lambda_a$	ρ_{ba}
$\partial_3(\mu \cdot \sigma)(a, b)$	$\lambda_a\lambda_b$	$\lambda_b\lambda_a$	$\lambda_a\rho_b$	ρ_{ba}	ρ_{ab}	$\lambda_b\rho_a$

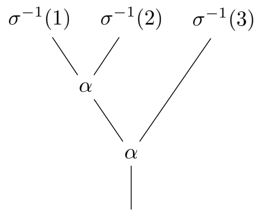
Notons que l'on retrouve dans ce tableau la relation

$$\partial_i(\mu \cdot \sigma)(a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_n) = \partial_{\sigma(i)}\mu(a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)})$$

vue à la fin de la démonstration de la proposition précédente.

— De même, on résumer dans le tableau suivant le calcul des différentielles de

$$\mu = (\alpha \circ (\alpha, \mathrm{id})) \cdot \sigma =$$



avec $\alpha \in \mathrm{sgn}_2 \subset E_2$ une opération anti-symétrique et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$:

σ	id_3	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\partial_1(\mu \cdot \sigma)(a, b)$	$\alpha_b\alpha_a$	$-\alpha_b\alpha_a$	$\alpha_a\alpha_b$	α_{ba}	$-\alpha_a\alpha_b$	α_{ab}
$\partial_2(\mu \cdot \sigma)(a, b)$	$-\alpha_b\alpha_a$	$\alpha_b\alpha_a$	α_{ab}	$-\alpha_a\alpha_b$	α_{ba}	$\alpha_a\alpha_b$
$\partial_3(\mu \cdot \sigma)(a, b)$	α_{ab}	α_{ba}	$-\alpha_b\alpha_a$	$\alpha_a\alpha_b$	$\alpha_b\alpha_a$	$-\alpha_a\alpha_b$

— On observe alors que toutes les différentielles de la relation de Jacobi $J := (\alpha \circ (\alpha, \mathrm{id})) \cdot (\mathrm{id}_3 + (1\,2\,3) + (1\,3\,2))$ sont égales à permutation près :

$$\partial_1 J(a, b) = \partial_3 J(a, b) = \partial_2 J(b, a) = \alpha_{ab} - \alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a.$$

Pour les relations de notre présentation de l'enveloppante, on pose

$$\partial R_3 := \left\{ \begin{matrix} \partial_1 r(a, b) \\ \partial_2 r(a, b) \\ \partial_3 r(a, b) \end{matrix} \ : \ r \in R_3 \ ; \ a, b \in A \right\}.$$

Proposition 3.2.5. Tout idéal $I \subset T(E_2 \otimes A)$ est un sous-p^*A-module de $T(E_2 \otimes A)$. En particulier, c'est le cas de l'idéal (∂R_3) et le morphisme structurel du p^*A-module quotient $T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3)$

$$\mathcal{T}(E_2) \to \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{\frac{T(E_2 \otimes A)}{(\partial R_3)}, \varepsilon}$$

se factorise par p, si bien que $T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3)$ est un A-module. De plus, pour tout A-module M et pour tout $x \in M$, il existe un unique morphisme de A-modules

$$\varphi_x : \frac{T(E_2 \otimes A)}{(\partial R_3)} \to M$$

envoyant 1 sur x *i.e.* $T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3)$ est le A-module libre associé à $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $I \subset T(E_2 \otimes A)$ un idéal. Pour tout $\mu \in \mathcal{T}E_2(n)$, on a :

$$\mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n) = \partial_i\mu(a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_n) \cdot x \in I$$

pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$ dès que $x \in I$. Ainsi, I est un sous-p^*A-module de $T(E_2 \otimes A)$.

Maintenant, le morphisme structurel

$$\Phi : \mathcal{T}(E_2) \to \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{\frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)},\varepsilon}$$

envoie une opération n-aire μ sur $\left(\mu_A, \left(\overline{\partial_i \mu(-)\cdot -}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$. Ainsi, si $r \in R_3$, alors $r_A = 0$ et $\overline{\partial_i r(a,b)} = 0$ pour tout $a, b \in A$ si bien que le morphisme Φ s'annule sur (R_3). Donc, Φ se factorise par p en $\overline{\Phi}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(E_2) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{E}nd_A \ltimes \mathrm{End}^A_{\frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)},\varepsilon} \\
\mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{T}(E_2)}{(R_3)} \arrow[ur, dotted, "\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

faisant de $T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3)$ un A-module.

Montrons que $T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3)$ a la propriété universelle du A-module libre sur $\mathbb{K}$. Soit M un A-module et soit $x \in M$. Supposons qu'existe un morphisme $\varphi_x : T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3) \to M$ envoyant 1 sur x. Tout élément de $T(E_2 \otimes A)/(\partial R_3)$ se décompose en combinaison linéaire d'éléments de la forme $\overline{\beta_{1a_1} \cdots \beta_{na_n}}$ avec $\beta_i \in \mathcal{P}(2)$. Or, on a vu en proposition 3.2.1 que $\beta_{ka_k} = \partial_2\beta_k(a_k)$ et comme φ est un morphisme de A-modules, on a (en notant $T := T(E_2 \otimes A)$)

$$\begin{aligned}
\varphi_x\left(\overline{\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n}}\right) &= \varphi_x\left(\overline{\beta^2_{1T}\left(a_1, \beta^2_{2T}\left(a_2, \cdots \beta^2_{nT}(a_n, 1)\cdots\right)\right)}\right) \\
&= \beta^2_{1M}\left(a_1, \beta^2_{2M}\left(a_2, \cdots \beta^2_{nM}(a_n, x)\cdots\right)\right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'unicité de φ_x.

L'expression précédente est linéaire en les β_i et les a_i si bien qu'elle induit par propriété universelle du produit tensoriel une application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\psi_x : T(E_2 \otimes A) \to M$$

envoyant 1 sur x. C'est un morphisme de p^*A-modules car pour tout $\beta \in E_2$, on a

$$\begin{aligned}
\psi_x\left(\beta^1_T(\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n}, a)\right) &= \psi_x(\beta_a\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n}) \\
&= \beta^2_M\left(a, \psi_x(\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n})\right) \\
&= \beta^1_M(\psi_x(\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n}), a)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $r \in R_3$, on a $\psi_x(\partial_i r(a,b)) = 0$ car M est un A-module et donc ψ_x se factorise en un morphisme de A-modules

$$\begin{tikzcd}
T(E_2 \otimes A) \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d] & M \\
\dfrac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)} \arrow[ur, dotted, "\varphi_x"'] &
\end{tikzcd}$$

envoyant 1 sur x. ✿

Théorème 3.2.6. L'isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\varphi_- : \frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)} \to \mathrm{End}_A\left(\frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)}\right)^{\mathrm{op}}$$

est un morphisme d'anneaux et on en déduit l'isomorphisme d'anneaux

$$U_{\frac{\mathcal{T}(E_2)}{(R_3)}}(A) \simeq \frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)}.$$

Démonstration. Pour tout $\beta \in E_2$ et $a \in A$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{\beta_a}}\left(\overline{\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n}}\right) &= \overline{\partial_2\beta_1(a_1)\cdots\partial_2\beta_n(a_n)}\cdot\overline{\beta_a}\\ &= \overline{\beta_{1a_1}\cdots\beta_{na_n}}\cdot\overline{\beta_a}\end{aligned}$$

et donc $\varphi_{\overline{\beta_a}}$ est l'endomorphisme $-\cdot\overline{\beta_a}$ de multiplication à droite par $\overline{\beta_a}$. Par linéarité de φ_-, on a $\varphi_x = -\cdot x$ pour tout $x \in T(E_2\otimes A)/(\partial R_3)$. Ainsi, pour tout $x, y \in T(E_2\otimes A)/(\partial R_3)$, on a

$$\varphi_{xy} = \varphi_y \circ \varphi_x.$$

De plus, l'isomorphisme naturel de A-modules $U_{\mathcal{P}}(A) \to T(E_2\otimes A)/(\partial R_3)$ induit un isomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{End}_A(U_{\mathcal{P}}(A))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_A\left(\frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)}\right)^{\mathrm{op}}$$

faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U_{\mathcal{P}}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{End}_A(U_{\mathcal{P}}(A))^{\mathrm{op}} \arrow[d] \\ \dfrac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)} \arrow[r, "\varphi_-"'] & \mathrm{End}_A\left(\dfrac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)}\right)^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$$

Comme φ_- et les morphismes à droite et en haut de ce carré commutatif sont des isomorphismes d'anneaux, le morphisme

$$U_{\mathcal{P}}(A) \to \frac{T(E_2\otimes A)}{(\partial R_3)}$$

est un isomorphisme d'anneaux. ✿

Remarque 3.2.7. Dans toutes cette preuve, on n'utilise à aucun moment le fait que les relations soient quadratiques. En fait, la construction précédente, permet de construire plus généralement une présentation d'une algèbre sur une opérade binaire. Néanmoins, la construction qui précède nous permet d'observer que l'algèbre enveloppante d'une algèbre sur une opérade quadratique binaire est une *algèbre quadratique-linéaire* puisque

$$\partial R_3 \subset (E_2\otimes A)\oplus(E_2\otimes A)^{\otimes 2}$$

si $R_3 \subset \mathcal{T}E_2(3)$.

Exemples 3.2.8.

— On retrouve la présentation de l'enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: on a $E_2 = \mathrm{sgn}_2$ et $R_3 = \{J\}$ où J est la relation de Jacobi, dont on a calculé à la fin des exemples 3.2.4 les différentielles

$$\partial_1 J(a,b) = \partial_2 J(b,a) = \partial_3 J(a,b) = \alpha_{[a,b]} - \alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a$$

si bien que

$$U_{\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{([a,b] = a\otimes b - b\otimes a)}$$

— Pour *pre$\mathcal{L}$ie*, on a $E_2 = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ et $R_3 = \{A\cdot(\mathrm{id}_3 - (2\,3))\}$ où A est la relation d'associativité. Les différentielles de $\mu := A\cdot(\mathrm{id}_3-(2\,3))$ sont alors

$$\begin{aligned}\partial_1\mu(a,b) &= \rho_b\rho_a - \rho_a\rho_b - \rho_{ab} + \rho_{ba}\\ \partial_2\mu(a,b) = -\partial_3\mu(a,b) &= \rho_b\lambda_a - \lambda_{ab} - \lambda_a\rho_b + \lambda_a\lambda_b\end{aligned}$$

Ainsi, si $(\mathfrak{g}, \{,\})$ est une algèbre pré-Lie, alors son algèbre enveloppante est

$$U_{pre\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})}{\begin{pmatrix}\rho_b\rho_a - \rho_a\rho_b - \rho_{\{ab\}} + \rho_{\{ba\}}\\ \rho_b\lambda_a - \lambda_{\{ab\}} - \lambda_a\rho_b + \lambda_a\lambda_b\end{pmatrix}}$$

— Pour $\mathcal{C}om$, on a $E_2 = \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$ et $R_3 = \{As\}$ où As est la relation d'associativité. On a alors

$$\partial_1 As(a,b) = \gamma_b\gamma_a - \gamma_{ab}$$
$$\partial_2 As(a,b) = \gamma_b\gamma_a - \gamma_a\gamma_b$$
$$\partial_3 As(a,b) = \gamma_{ab} - \gamma_a\gamma_b$$

de telle sorte que $(\partial R_3) = (\gamma_{ab} - \gamma_a\gamma_b)$ et

$$U_{\mathcal{C}om}(A) = \frac{T(A)}{(\gamma_{ab} = \gamma_a\gamma_b)} = A_+$$

où $A_+ = A \oplus \mathbb{K}$ avec $(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2) = a_1a_2 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + \lambda_1\lambda_2$.

— En utilisant le premier tableau dans l'exemple 3.2.4, on peut calculer de manière générale une présentation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre sur une opérade quadratique binaire paramétrée par les coefficients $(c_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}$ (*cf.* exemples 1.3.10) : on a $E_2 = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ et $R_3 = \{r_c\}$ où

$$r_c = \lambda \circ (\lambda, \mathrm{id}) - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} c_\sigma \lambda \circ (\mathrm{id}, \lambda) \cdot \sigma$$

et donc

$$U_{\frac{\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]}{(r_c)}}(A) = \frac{T(A\oplus A)}{\left(\begin{aligned} \rho_b\rho_a &= c_{\mathrm{id}_3}\rho_{ab} + c_{(1\,2)}\lambda_a\rho_b + c_{(2\,3)}\rho_{ba} + c_{(1\,3)}\lambda_b\lambda_a + c_{(1\,2\,3)}\lambda_b\rho_a + c_{(1\,3\,2)}\lambda_a\lambda_b, \\ \rho_b\lambda_a &= c_{\mathrm{id}_3}\lambda_a\rho_b + c_{(1\,2)}\rho_{ab} + c_{(2\,3)}\lambda_a\lambda_b + c_{(1\,3)}\lambda_b\rho_a + c_{(1\,2\,3)}\lambda_b\lambda_a + c_{(1\,3\,2)}\rho_{ba}, \\ \lambda_{ab} &= c_{\mathrm{id}_3}\lambda_a\lambda_b + c_{(1\,2)}\lambda_b\lambda_a + c_{(2\,3)}\lambda_a\rho_b + c_{(1\,3)}\rho_{ba} + c_{(1\,2\,3)}\rho_{ab} + c_{(1\,3\,2)}\lambda_b\rho_a \end{aligned}\right)}.$$

Ainsi, on trouve des présentations pour les enveloppantes d'algèbres associatives, de Leibniz et de Poisson :

$$U_{\mathcal{A}ss}(A) = \frac{T(A\oplus A)}{\left(\begin{aligned} \rho_b\rho_a &= \rho_{ab}, \\ \rho_b\lambda_a &= \lambda_a\rho_b, \\ \lambda_{ab} &= \lambda_a\lambda_b \end{aligned}\right)} = A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}}$$

$$U_{\mathcal{L}eib}(L) = \frac{T(L\oplus L)}{\left(\begin{aligned} \rho_b\rho_a &= \rho_{ab} - \lambda_a\rho_b, \\ \rho_b\lambda_a &= \lambda_a\rho_b - \rho_{ab}, \\ \lambda_{ab} &= \lambda_a\lambda_b - \lambda_b\lambda_a \end{aligned}\right)}$$

$$U_{\mathcal{P}ois}(A) = \frac{T(A\oplus A)}{\left(\begin{aligned} \rho_b\rho_a &= \rho_{ab} + \frac{1}{3}(\rho_{ba} - \lambda_a\rho_b + \lambda_a\lambda_b - \lambda_b\rho_a) \\ \rho_b\lambda_a &= \lambda_a\rho_b + \frac{1}{3}(\lambda_a\lambda_b - \rho_{ab} + \rho_{ba} - \lambda_b\lambda_a) \\ \lambda_{ab} &= \lambda_a\lambda_b + \frac{1}{3}(\rho_{ba} - \lambda_b\lambda_a + \lambda_b\rho_a - \rho_{ab}) \end{aligned}\right)}$$

Proposition 3.2.9. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E_\mathcal{P})/(R_\mathcal{P})$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{T}(E_\mathcal{Q})/(R_\mathcal{Q})$ deux opérades (quadratiques) binaires présentée. Soit $\varphi_2 : E_\mathcal{P} \to E_\mathcal{Q}$ un morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules tel que $\mathcal{T}\varphi_2(R_\mathcal{P}) \subset (R_\mathcal{Q})$. Soit A une $\mathcal{Q}$-algèbre. Le morphisme

$$T(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_A) : T(E_\mathcal{P} \otimes A) \to T(E_\mathcal{Q} \otimes A)$$

envoie une différentielle partielle $\partial_i\mu(a_1,\ldots,a_{n-1})$ sur $(\partial_i\varphi(\mu))(a_1,\ldots,a_{n-1})$ si bien qu'il passe au quotient en un morphisme

$$\overline{T(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_A)} : U_\mathcal{P}(\varphi^* A) \to U_\mathcal{Q}(A).$$

Ce morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires coïncide avec le morphisme

$$U_\varphi^A : U_\mathcal{P}(\varphi^* A) \to U_\mathcal{Q}(A)$$

associé au morphisme d'opérades $\varphi := \overline{\mathcal{T}\varphi_2} : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ (*cf.* proposition 3.1.5). Autrement dit, on a

$$U^A_{\overline{\mathcal{T}\varphi_2}} = \overline{T(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_A)}.$$

Démonstration. Par propriété universelle du quotient et de l'algèbre tensorielle, il suffit de vérifier que U_{φ}^{A} coïncide avec $\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_A$ sur $E_{\mathcal{P}} \otimes A$. Or, on a vu dans la démonstration de la proposition 3.1.5 que U_{φ}^{A} envoie $\mu^i \otimes (a_1, \dots, 1, \dots, a_n)$ sur $\varphi(\mu)^i \otimes (a_1, \dots, 1, \dots, a_n)$ ce qui se traduit par

$$U_{\varphi}^{A}(\partial_i \mu(a_1, \dots, a_{n-1})) = (\partial_i \varphi(\mu))(a_1, \dots, a_{n-1})$$

et

$$U_{\varphi}^{A}(\beta_a) = \varphi(\beta)_a$$

pour tout $\beta \in E_{\mathcal{P}}$ et $a \in A$. ✿

Exemples 3.2.10.

— Le morphisme

$$U^{A}_{\mathcal{A}ss \to \mathcal{C}om} : A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}} \to A_+$$

est le morphisme de multiplication (qui est bien un morphisme d'anneaux lorsque A est commutatif).

— Pour toute algèbre associative A, le morphisme

$$U^{A}_{\mathcal{L}ie \to \mathcal{A}ss} : U_{\mathcal{L}ie}(A) \to A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}}$$

est le morphisme induit ($U_{\mathcal{L}ie}$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathrm{Alg}(u\mathcal{A}ss) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{L}ie)$) par l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$A \to A_+ \otimes A_+^{\mathrm{op}}$$

envoyant a sur $a \otimes 1 - 1 \otimes a$.

— Pour toute algèbre pré-Lie $\mathfrak{g}$, le morphisme $\mathcal{L}ie \to pre\mathcal{L}ie$ induit l'unique morphisme

$$U_{\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{([a,b] = a \otimes b - b \otimes a)} \to \frac{T(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})}{\begin{pmatrix} \rho_b\rho_a - \rho_a\rho_b - \rho_{\{ab\}} + \rho_{\{ba\}} \\ \rho_b\lambda_a - \lambda_{\{ab\}} - \lambda_a\rho_b + \lambda_a\lambda_b \end{pmatrix}} = U_{pre\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g})$$

envoyant $a \in \mathfrak{g}$ sur $\lambda_a - \rho_a$.

— Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le morphisme

$$U^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{L}eib \to \mathcal{L}ie} : U_{\mathcal{L}eib}(\mathfrak{g}) \to U_{\mathcal{L}ie}(\mathfrak{g})$$

envoie (λ_a, ρ_b) sur $a - b$.

Bibliographie

[Bec67] Jonathan Mock Beck. « Triples, algebras and cohomology ». Thèse de doct. Columbia University, 1967. URL : http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/2/tr2.pdf.

[BM09] Clemens Berger et Ieke Moerdijk. « On the derived category of an algebra over an operad ». In : (2009). URL : https://arxiv.org/abs/0801.2664v2.

[Dha+25] Nishant Dhankhar et al. « Beck modules and alternative algebras ». In : *Communications in Algebra* (2025), p. 1-16. URL : https://arxiv.org/abs/2309.07962v4.

[HS84] Harald Hanche-Olsen et Erling Størmer. « Jordan operator algebras ». In : (1984). URL : https://hanche.folk.ntnu.no/joa/joa-h.pdf.

[Hof10] Eric Hoffbeck. « Opérades de Koszul et homologie des algebres en caractéristique positive ». Thèse de doct. Lille 1, 2010. URL : https://www.math.univ-paris13.fr/~hoffbeck/these.pdf.

[Hov07] Mark Hovey. *Model categories*. 63. American Mathematical Soc., 2007.

[Lam12] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on modules and rings*. T. 189. Springer Science & Business Media, 2012. URL : https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0525-8.

[LV12] Jean-Louis Loday et Bruno Vallette. *Algebraic operads*. T. 346. Springer Science & Business Media, 2012.

[MR06] Martin Markl et Elisabeth Remm. « Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras ». In : *Journal of Algebra* 299.1 (2006), p. 171-189. URL : https://arxiv.org/abs/math/0412206.

[Mil11] Joan Millès. « André–Quillen cohomology of algebras over an operad ». In : *Advances in Mathematics* 226.6 (2011), p. 5120-5164. ISSN : 0001-8708. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811000065.

[Qui70] Daniel Quillen. « On the (co-) homology of commutative rings ». In : *Proc. Symp. Pure Math.* T. 17. 2. 1970, p. 65-87.

[Rem24] Elisabeth Remm. « Depolarization and distributive laws ». In : *arXiv preprint arXiv :2404.01937* (2024). URL : https://arxiv.org/abs/2404.01937.

[Rie14] Emily Riehl. *Categorical homotopy theory*. T. 24. Cambridge University Press, 2014. URL : https://math.jhu.edu/~eriehl/cathtpy/.